Tutorium 13

1 Quadriken

Definition. Sei $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ von der Form

$$F = \sum_{i \leq j} \tilde{a}_{i,j} x_i x_j \ + \ \sum_i b_i x_i \ + \ c$$

und

$$Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid F(x) = 0\}$$

Dann heißt (Q, F) <u>Quadrik</u> im $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung (Matrizenform)**.** Falls $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, so lässt sich jede Quadrik auch in der Form

$$\boxed{F = x^T A x + b^T x + c}$$

mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ <u>symmetrisch</u>, $b \in \mathbb{K}^n$ und $c \in \mathbb{K}$.

Beispiel ($\mathbb{R}^2$)**.** (1) Kreis mit Radius r und Mittelpunkt m: $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - m||_2 = r\}$

(2) Standardhyperbel: $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid xy = 1\}$

(3) Standardparabel: $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid y - x^2 = a\}$

Aufgabe 1. Schreibe die Beispielquadriken in Matrizenform.

Lösung. (1)

$$\begin{aligned}
&||x - m||_2 = r \\
\Leftrightarrow &||x - m||_2^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow &(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &x_1^2 + x_2^2 - 2m_1x_1 - 2m_2x_2 + m_1^2 + m_2^2 - r^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_2=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2m_1 & -2m_2 \end{pmatrix}}_{=-2m=:b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{m_1^2 + m_2^2 - r^2}_{=:c} = 0
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&x_1 x_2 = 1 \\
\Leftrightarrow &x_1 x_2 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underbrace{- 1}_{=:c} = 0
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&x_2 - x_1^2 = a \\
\Leftrightarrow &- x_1^2 + x_2 - a = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underbrace{- a}_{=:c} = 0
\end{aligned}$$

Skizze: Klar, bei (2), (3) jeweils nach y bzw. x_2 auflösen.

2 Affine Äquivalenz

Bemerkung (Basiswechsel)**.** Sei (Q, F) eine Quadrik mit

$$F = x^T Ax \ + \ b^T x \ + \ c$$

und $\Phi(x) = Mx + t$ eine Affinität. Dann induziert Φ einen affinen Basiswechsel und in den neuen Koordinaten hat erhält man als "definierendes Polynom":

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x) &:= F(\Phi(x)) = (Mx+t)^T A(Mx+t) \ + \ b^T(Mx+t) \ + \ c \\ &= x^T \underbrace{M^T AM}_{=:\tilde{A}} x \ + \ \underbrace{(M^T(2At+b))}_{=:\tilde{b}}{}^T x \ + \ \underbrace{F(t)}_{=:\tilde{c}}\end{aligned}$$

sowie für die "Quadrikpunkte" $\tilde{Q}$:

$$\begin{aligned}& x \in Q \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\Phi(\Phi^{-1}(x))) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F}(\Phi^{-1}(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^{-1}(x) \in \tilde{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Phi(\tilde{Q}) \\ \Leftrightarrow \quad & Q = \Phi(\tilde{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{Q} = \Phi^{-1}(Q)\end{aligned}$$

Das führt zur folgenden Definition:

Definition. Die Quadriken (Q, F) und $(\tilde{Q}, \tilde{F})$ heißen affin äquivalent falls gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= F \circ \Phi \\ \tilde{Q} &= \Phi^{-1}(Q)\end{aligned}$$

für eine Affinität $\Phi \in \operatorname{Aff}(\mathbb{A}^n(\mathbb{K}))$.

Bemerkung. Affine Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und die Quadriken

$$\begin{aligned}E_{\mathbb{K}} &= \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ H_{\mathbb{K}} &= \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid x^2 - y^2 = 1\}\end{aligned}$$

gegeben.

(1) Skizziere $E_{\mathbb{R}}$ und $H_{\mathbb{R}}$.

(2) Gib eine Affinität an, die $E_{\mathbb{C}}$ in $H_{\mathbb{C}}$ überführt.

(3) Schneide $E_{\mathbb{C}}$ mit der reellen xy-Ebene sowie der rellen $x(iy)$-Ebene.

Lösung. (1) Wegen $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in E_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ und $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in H_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1}$ erhält man:

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix}$$

(3) Der Schnitt mit der reellen xy-Ebene ist wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{R}}$$

ein Kreis.

Der Schnitt mit der rellen $x(iy)$-Ebene ist wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{C}} \cap (\mathbb{R} \times i\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (iy)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_{\mathbb{R}}$$

eine Hyperbel.

Abbildung 1: $E_{\mathbb{R}}$ (Kreis) bzw. $H_{\mathbb{R}}$ (Hyperbel)

3 Normalformen

Wiederholung. Sei (Q, F) eine Quadrik mit

$$F = x^T A x \; + \; b^T x \; + \; c$$

und $\Phi(x) = Mx + t$ eine Affinität. Dann gilt:

$$F(\Phi(x)) = x^T \underbrace{M^T A M}_{=:\tilde{A}} x \; + \; \underbrace{(M^T(2At + b))}_{=:\tilde{b}}{}^T x \; + \; \underbrace{F(t)}_{=:\tilde{c}}$$

Satz ($\mathbb{C}$-Normalformen)**.** Jede Quadrik (Q, F) ist affin äquivalent zu einer der folgenden Normalformen

(i) $\sum_{i=1}^r x_i^2 = 0$

(ii) $\sum_{i=1}^r x_i^2 \; + \; 1 = 0$

(ii) $\sum_{i=1}^r x_i^2 \; + \; x_{r+1} = 0$

Beweis. A ist symmetrisch, also orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert ein $M \in U(n)$ so dass

$$M^T A M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Transformiert man stattdessen mit MD wobei $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ so ergibt sich:

$$(MD)^T A (MD) = \operatorname{diag}(\lambda_1 \mu_1^2, \ldots, \lambda_n \mu_n^2)$$

Wir können also erreichen, dass

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $b \in \operatorname{Bild} A$ dann können wir den Translationsterm t so wählen, dass der lineare Term verschwindet, also $\tilde{b} = 0$ und nach evtl. Multiplikation der Gleichung (und erneutes Skalieren der Basisvektoren so dass A erhalten bleibt) erhalten wir eine der Normalformen (i) oder (ii).

Ansonsten können wir t so wählen, dass der konstante Term verschwindet und ein einziger linearer Term übrigbleibt (siehe Aufgabe 3, da machen wir das am Ende) – also Normalform (iii). $\square$

Satz ($\mathbb{R}$-Normalformen)**.** Jede Quadrik (Q, F) ist affin äquivalent zu einer der folgenden Normalformen

(i) $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \; - \; \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = 0$

(ii) $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \; - \; \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 \; + \; 1 = 0$

(iii) $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \; - \; \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 \; + \; x_{r+1} = 0$

Beweis. Ganz analog, nur können wir hier höchstens

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erreichen! $\square$

Definition. Eine Quadrik heißt <u>Mittelpunktsquadrik</u>, falls die Normalform keinen linearen Term enthält.

Bemerkung. Grund: Für eine Mittelpunktsquadrik in Normalform gilt $x \in Q \Rightarrow -x \in Q$.

Aufgabe 3. Sei $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Gerade im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Bestimmte die affine Normalform von

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,0) = d(x,G)\}$$

und skizziere Q.

Lösung. Wir erinnern uns:

$$d^2(x+U, W) = \left|\left|\pi_{(U+W)^\perp}(x)\right|\right|^2 = \left|\left|x - \pi_{(U+W)}(x)\right|\right|^2$$

In der Norm steht etwas Lineares in den x_i, also sind Abstandsquadrate tatsächlich quadratische Polynome. Insbesondere ist dann

$$F = d^2(x,0) - d^2(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

ein Q definierendes Polynom.

Wir wenden die affine Transformation $x \mapsto x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
F' =& d^2(x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0) - d^2(x, \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
=& x_1^2 + (x_2+1)^2 + x_3^2 - ||x - \frac{1}{2}\underbrace{\left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle}_{=x_1+x_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}||^2 \\
=& x_1^2 + (x_2+1)^2 + x_3^2 - ||\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1-x_3 \\ 2x_2 \\ x_3-x_1 \end{pmatrix}||^2 \\
=& x_1^2 + (x_2+1)^2 + x_3^2 - \frac{1}{4}\left(2(x_1-x_3)^2 + 4x_2^2\right) \\
=& x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 - \frac{1}{2}x_3^2 - x_2^2 \\
=& \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2 + 1 \\
=& \frac{1}{2}\left(x_1+x_3\right)^2 + 2x_2 + 1
\end{aligned}$$

Jetzt noch die affine Transformation $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_3) \mapsto x_1$, $2x_2+1 \mapsto x_2$, $x_3 \mapsto x_3$ (das ist wohldefiniert, wie man durch Umstellen in die Form $\Phi(x) = \ldots$ erkennt. Zwischenfrage: Können wir das Bild von x_3 beliebig wählen?):

$$\tilde{F} = x_1^2 + x_2$$

Aha, das ist eine Normalform vom Typ (iii), eine Parabel. Es ist auch interessant zu bemerken, dass wir die x_3-Achse relativ beliebig wählen konnten. Die Abstandseigenschaft, über die Q definiert wurde, scheint also nicht erhalten worden zu sein!