Tutorium 11

1 Quaternionen

Definition. Ein Ring heißt Schiefkörper, wenn jedes Nichtnullelement invertierbar ist.
Ein kommutativer Schiefkörper heißt Körper.

Definition und Satz.

$$\mathbb{H} := \{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$$

bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation im Matrizenring einen Schiefkörper, die sog. Quaternionen.

Definition und Satz. In Analogie zu $\mathbb{C}$ setzt man:

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\mathbb{H} = \{\alpha 1 + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Wir können $\mathbb{H}$ also als 4-dimensionalen reellen Vektorraum auffassen.

Bemerkung. Meist lässt man den Basisvektor 1 weg und schreibt einfach

$$q = \alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K}$$

Man nennt α den Realteil $\mathrm{Re}(q)$. Die Menge

$$W := \{q \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(q) = 0\}$$

ist ein UVR von $\mathbb{H}$, ihre Elemente heißen reine Quaternionen.

Satz. Das Produkt zweier Quaternionen ergibt sich dann durch formales "Ausmultiplizieren" unter Benutzung der Rechenregeln:

$$\mathbb{I}\mathbb{J} = \mathbb{K} = -\mathbb{J}\mathbb{I}, \quad \mathbb{J}\mathbb{K} = \mathbb{I} = -\mathbb{K}\mathbb{J}, \quad \mathbb{K}\mathbb{I} = \mathbb{J} = -\mathbb{I}\mathbb{K},$$
$$\mathbb{I}^2 = \mathbb{J}^2 = \mathbb{K}^2 = -1$$

Analog zu $\mathbb{C}$ gilt:

$$(\alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K})^* = \alpha - \beta\mathbb{I} - \gamma\mathbb{J} - \delta\mathbb{K}$$

Daher nennt man q^* auch das zu q konjugierte Quaternion.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
& (2+3\mathbb{I}+5\mathbb{K})(3+2\mathbb{J}+\mathbb{K}) \\
= \; & 6+4\mathbb{J}+2\mathbb{K} \; + \; 3\mathbb{I}3+3\mathbb{I}2\mathbb{J}+3\mathbb{I}\mathbb{K} \; + \; 5\mathbb{K}3+5\mathbb{K}2\mathbb{J}+5\mathbb{K}\mathbb{K} \\
= \; & 6+4\mathbb{J}+2\mathbb{K} \; + \; 9\mathbb{I}+6\mathbb{K}-3\mathbb{J} \; + \; 15\mathbb{K}-10\mathbb{I}-5 \\
= \; & 1-\mathbb{I}+\mathbb{J}+23\mathbb{K}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1. Berechnen Sie

(i) Multiplikation $q_1 q_2$

(ii) äußeres Grassmann-Produkt $\frac{1}{2}(q_1q_2 - q_2q_1)$

(iii) inneres euklidisches Produkt $\frac{1}{2}(q_1^* q_2 + q_2^* q_1)$

(iv) $\mathrm{Re}(q_1^* q_2)$ sowie $\mathrm{Re}(q_1 q_2^*)$.

(v) q^{-1} für $q \neq 0$.

und drücken Sie die Ergebnisse mit Hilfe von $\mathbb{R}^3$-Kreuz- und Skalarprodukt aus. Hinweis: $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Lösung. Sei $q_1 = \alpha_1 + \beta_1\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{J} + \delta_1\mathbb{K}$, $q_2 = \alpha_2 + \beta_2\mathbb{I} + \gamma_2\mathbb{J} + \delta_2\mathbb{K}$, $q = \alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K}$.

(i)

$$\begin{aligned}
q_1q_2 &= (\alpha_1 + \beta_1\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{J} + \delta_1\mathbb{K})(\alpha_2 + \beta_2\mathbb{I} + \gamma_2\mathbb{J} + \delta_2\mathbb{K}) \\
&= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2 \\
&\quad + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2)\mathbb{I} \\
&\quad + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 + \delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2)\mathbb{J} \\
&\quad + (\delta_1\alpha_2 + \alpha_1\delta_2 + \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\mathbb{K}
\end{aligned}$$

Wegen des VR-Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K} \mapsto (\alpha, \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix})$$

macht es Sinn, q mit $\Phi(q)$ zu identifizieren und zu schreiben:

$$(\alpha_1, v_1)(\alpha_2, v_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \langle v_1, v_2\rangle, \alpha_2 v_1 + \alpha_1 v_2 + v_1 \times v_2)$$

Aha, in der Multiplikation sind Skalar- und Kreuzprodukt "versteckt"!

(ii) Nach (i) ist das Produkt bis auf das Kreuzprodukt symmetrisch, folglich:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(q_1q_2 - q_2q_1) \\
= \; & \frac{1}{2}((\alpha_1, v_1)(\alpha_2, v_2) - (\alpha_2, v_2)(\alpha_1, v_1)) \\
= \; & \frac{1}{2}(0, v_1 \times v_2 - v_2 \times v_1) \\
= \; & (0, v_1 \times v_2)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(q_1^* q_2 + q_2^* q_1) \\
= \; & \frac{1}{2}((\alpha_1, -v_1)(\alpha_2, v_2) + (\alpha_2, -v_2)(\alpha_1, v_1)) \\
= \; & \frac{1}{2}(2\alpha_1\alpha_2 + 2\langle v_1, v_2\rangle, 0) \\
= \; & (\alpha_1\alpha_2 + \langle v_1, v_2\rangle, 0) \\
= \; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2
\end{aligned}$$

(iv)

$$\mathrm{Re}(q_1^* q_2) = \mathrm{Re}((\alpha_1, -v_1)(\alpha_2, v_2)) = \mathrm{Re}(\alpha_1\alpha_2 + \langle v_1, v_2\rangle, \ldots) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2$$

und analog für $q_1 q_2^*$. Im Gegensatz zu (iii) ist der "Imaginärteil" dieser Produkte i.A. nicht 0!

(v) Aber für $q_1 = q_2 = q$ ist der Imaginärteil null, denn:

$$\begin{aligned} qq^* &= (\alpha, v)(\alpha, -v) = (\alpha^2 + \langle v, v\rangle, -\alpha v + \alpha v - v \times v) \\ &= (\alpha^2 + \langle v, v\rangle, 0) \\ &= (\alpha, -v)(\alpha, v) = (\alpha^2 + \langle v, v\rangle, \alpha v - \alpha v - v \times v) = q^* q \end{aligned}$$

Aber daran sieht man auch:

$$q \neq 0 \;\Rightarrow\; qq^* = q^* q \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; q^{-1} = \frac{q*}{qq^*}$$

Satz.

$$\langle q_1, q_2\rangle := \mathrm{Re}(q_1^* q_2) = \frac{1}{2}(q_1^* q_2 + q_2^* q_1) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$. Offenbar bilden die $\{1, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}\}$ dann eine ONB.
Die induzierte Norm $||\cdot||$ ist <u>multiplikativ</u>, d.h. es gilt:

$$||q_1 q_2|| = ||q_1|| \cdot ||q_2||$$

Definition.

$$\mathbb{H}_1 := \{q \in \mathbb{H} \mid ||q|| = 1\}$$

heißt Gruppe der <u>Einheitsquaternionen</u>.

2 Quaternionen und Drehungen

Satz. Für jedes $q \in \mathbb{H}_1$ hat man eine Abbildung ("Konjugation mit q")

$$\Phi_q : W \to W, w \mapsto qwq^{-1}$$

Bemerkung. Wegen der Multiplikativität der Norm ist Φ_q eine lineare Isometrie. Es lässt sich auch zeigen, dass sie Determinante 1 hat. Und da $W \cong \mathbb{R}^3$ so können wir Φ_q als Element von SO(3), also als *Drehung* ansehen!

Schreiben wir $\mathbb{H}_1 \ni q = \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})v$ mit einem reinen Einheitsquaternion $v \in W \cap H_1$, so ist Φ_q eine Drehung um v (als Vektor im $\mathbb{R}^3$ interpretiert) mit Drehwinkel α.

Aufgabe 2. Stellen Sie die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um die x- bzw. y-Achse mit Hilfe von Quaternionen dar, und untersuchen Sie, welcher Drehung das Produkt entspricht.

Lösung.

$$\begin{aligned}
q_1 &:= \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})\mathbb{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I} \\
q_2 &:= \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})\mathbb{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{J} \\
q &:= q_1 q_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I})(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{J}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{K}
\end{aligned}$$

Die Drehung um 45 Grad zuerst um y und dann um x entspricht also einer Drehung mit Drehwinkel $2\arccos(0.5) = \frac{2\pi}{3}$ (120 Grad) um die $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$-Achse.

Bemerkung. Es gilt $\mathbb{H}_1 = \mathrm{SU}(2)$, und damit ergibt sich fast direkt der folgende Satz:

Satz.

$$\Phi : \mathbb{H}_1 \to \mathrm{SO}(3), q \mapsto \Phi_q$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm 1\}$. Also gilt:

$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}(3)$$

3 Die Quaternionengruppe

Definition und Satz. Die Menge

$$Q := \{\pm 1, \pm \mathbb{I}, \pm \mathbb{J}, \pm \mathbb{K}\}$$

bildet eine Gruppe, die sog. Quaternionengruppe.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe.

Lösung. Sei $U \leq Q$. Fallunterscheidung:

(a) $U = \{1\}$

(b) $\mathbb{I} \in U$: $\mathbb{I}^2 = -1 \in U$

- (i) $\mathbb{J}$ oder $\mathbb{K}$ in U: $U = Q$
- (ii) sonst: $U = \{\pm 1, \pm \mathbb{I}\} = \langle \mathbb{I} \rangle$

(c) $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}$, $-\mathbb{I}$, $-\mathbb{J}$ oder $-\mathbb{K}$ in U: siehe (b)

(d) sonst: $U = \{\pm 1\} = \langle -1 \rangle$

Also:

$$\mathcal{U}(Q) = \{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle \mathbb{I} \rangle, \langle \mathbb{J} \rangle, \langle \mathbb{K} \rangle, Q\}$$

Das ist interessant: Alle echten Untergruppen sind abelsch (da zyklisch), aber Q ist es nicht!