Tutorium 8

1 Positiv definite Matrizen

Satz. Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist positiv definit

(ii) Die Hauptminoren $\det A_k$ sind positiv ($A_k := (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $k = 1, \dots, n$) (Hurwitz-Kriterium)

(iii) Es gibt eine untere Dreiecksmatrix $G \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A = GG^T$ (Cholesky-Zerlegung)

Satz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit $\Rightarrow$ A regulär und diagonalisierbar

Aufgabe 1. Finden Sie eine Matrix $S \in O(3)$ so dass

$$S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} S$$

eine Diagonalmatrix ist.

Lösung. Achtung: Die Matrix ist nicht positiv definit!

Vergleich mit Basiswechselformel: Scheinbar suchen wir eine ONB aus Eigenvektoren!

$$CP(A,\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$
$$(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

Diagonalisierbar ist die Matrix schonmal, wir bestimmten die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aha; $T := \big(b_1 \mid b_2 \mid b_3\big) \in O(3)$, also $T^{-1} = T^T$ und die Behauptung folgt.

2 Isometrie

Definition. Seien (X, d), (Y, e) metrische Räume. Eine Abbildung $\phi : X \to Y$ mit

$$d(x, y) = e(\phi(x), \phi(y)) \quad \forall x \in X, y \in Y$$

heißt Isometrie. Die Gruppe

$$\mathrm{Iso}(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \phi \text{ bijektive Isometrie}\} \leq \mathrm{Sym}(X)$$

heißt Isometriegruppe des metrischen Raums (X, d).

Beispiel (Translation)**.** Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum, und $v \in V$. Die Translation

$$\phi_v : V \to V, x \mapsto x + v$$

ist eine bijektive Isometrie (denn $\phi_v^- 1 = phi_{-v}$), also $\phi_v \in \mathrm{Iso}(V, || \cdot ||)$.

Wegen $\phi_v(x + y) = (x + y) + v$, aber $\phi_v(x) + \phi_v(y) = (x + y) + 2v$ ist ϕ_v nur für $v = 0$ linear.

Definition. Seien V, W euklidische (oder unitäre) Vektorräume. Eine Isometrie $\Phi : V \to W$, die gleichzeitig linear ist, heißt lineare Isometrie.

Satz. Sei V euklidischer Vektorraum.

(i) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle)$ (Polarisierungsformel)

(ii) $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist lineare Isometrie $\Leftrightarrow$ $\langle x, y\rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_W$

Satz. Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum. Dann sind äquivalent:

(i) $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist eine Isometrie

(ii) jedes ONS wird injektiv auf ein ONS abgebildet

(iii) eine (jede) ONB wird injektiv auf ein ONS abgebildet

(iv) $D_{BB}(\Phi) \in O(n)$ für eine (jede) ONB B

((iii), (iv) nur falls $\dim V = n < \infty$)

Beispiel (Spiegelung)**.** Sei V ein euklidischer Vektorraum und $0 \neq v \in V$. Betrachte

Abbildung 1: Reflektion x an $v^\perp$

Dies führt zu:

$$\Phi_v : V \to V, x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v$$

Diese Abbildung heißt Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$. Für $x = \lambda v$, $y \in \langle v\rangle^\perp$ gilt:

$$\Phi_v(x) = \lambda v - 2\frac{\langle \lambda v, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v = \lambda v - 2\lambda v = -\lambda v = -x$$
$$\Phi_v(y) = y - 2\frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v = y$$

was unsere Intuition einer Spiegelung bestätigt. Und Φ ist sinnvollerweise auch eine Isometrie wegen

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_v(x), \Phi_v(y)\rangle = \left\langle x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v, y - 2\frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v\right\rangle \\
= \;& \langle x, y\rangle - 2\left\langle \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v, y\right\rangle - 2\left\langle x, \frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v\right\rangle + 4\left\langle \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v, \frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v\right\rangle \\
= \;& \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, y\rangle - 2\frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle x, v\rangle + 4\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, v\rangle \\
= \;& \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Jetzt wäre es noch schön, wenn es für je zwei Vektoren v, w gleicher Länge eine Spiegelung gibt, die v mit w vertauscht (vgl. letztes Übungsblatt). Die Spiegelebene muss natürlich orthogonal zum Verbindungsvektor $v - w$ stehen. Es gilt tatsächlich:

$$\Phi_{v-w}(v) = \Phi_{v-w}(\frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2}(v - w)) = v - 2\frac{\left\langle \frac{1}{2}(v - w), v - w\right\rangle}{\langle v - w, v - w\rangle}(v - w) = v - (v - w) = w$$

wegen $\langle v + w, v - w\rangle = 0$ (und vice versa).

Aufgabe 2. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.

(i) Bestimmen Sie die Matrix, die bezüglich der Standardbsasis die Spieglung an $v^\perp$ beschreibt.

(ii) Zeigen Sie, dass es unendlich viele p, $q \in \mathbb{Q}$ gibt mit $p^2 + q^2 = 1$.

Lösung. Zu (i): Wir erinnern uns:

$$\Phi_v(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - 2\frac{\sum_j x_j v_j}{\langle v, v\rangle}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Die i-te Zeile dieses Vektors ist:

$$x_i - 2\frac{\sum_j x_j v_j}{\langle v, v\rangle}v_i$$

Es gilt also:

$$\Phi_v(x) = Ax \qquad \text{mit } A := (a_{i,j}),\ a_{i,j} := \delta_{i,j} - \frac{2v_iv_j}{\langle v, v\rangle}$$

Zu (ii): Wähle einfach $v \in \mathbb{Q}^2$ und betrachte die erste Spalte der Matrix $A \in O(2)$: Diese ist nämlich normiert und besteht nur aus Einträgen aus $\mathbb{Q}$.

Beispiel (Drehkästchen)**.** Wir wollen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ um θ um den Ursprung drehen. Wir können den gedrehten Vektor $\Phi(x)$ mit Hilfe der ONB $\{x, x^\perp\}$, $x^\perp := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \cos(\theta)x + \sin(\theta)x^\perp \\
&= \cos(\theta)(x_1e_1 + x_2e_2) + \sin(\theta)(-x_2e_1 + x_2e_2) \\
&= (\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2)\,e_1 + (\cos(\theta)x_2 + \sin(\theta)x_1)\,e_2 \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=:D_\theta} x
\end{aligned}$$

D_θ heißt <u>Drehkästchen</u> zum Winkel θ und ist offenbar orthogonal; da die Standardbasis ONB ist, ist die Drehung Φ eine Isometrie.

Weiterhin gilt $SO(2) = \{D_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$!

Beispiel (Drehung in zweidimensionalen Unterräumen)**.** Analog ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & & & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix einer Drehung in der Ebene $\langle b_1, b_2 \rangle$ (für eine ONB $\{b_i\}$).

Satz (Eulerwinkel)**.** Jede Matrix $A \in SO(3)$ lässt sich darstellen wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(für geeignete α, β, $\gamma \in [0, 2\pi)$)

Bemerkung.

Abbildung 2: Veranschaulichung einer solchen schrittweisen Drehung

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

in $SO(3)$ liegt, und zerlegen Sie A wie im Satz.

Lösung. Es gilt:

$$Ae_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, Ae_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, Ae_3 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren haben Einheitslänge und stehen orthogonal aufeinander. Also $A \in O(3)$, und wegen $\det A = \frac{1}{13^3}(13 \cdot (5^2 + 12^2)) = 1$ sogar $A \in SO(3)$.

Wir setzen an:

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & -f & 0 \\ f & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bc & bd \\ b & ac & -ad \\ 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & -f & 0 \\ f & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae - bcf & -af - bce & bd \\ be + acf & -bf + ace & -ad \\ df & de & c \end{pmatrix} = A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ c = \frac{5}{13} \quad \text{und} \quad bd \neq 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow a = e = 0$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} -bf\frac{5}{13} & 0 & bd \\ 0 & -bf & 0 \\ df & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ bd = -12 = -df \Rightarrow d = -f \Rightarrow 1 = -bf = b^2 \Rightarrow \text{wähle } b = 1, f = -1$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ d = -\frac{12}{13}$$

Wir verifizieren jetzt noch, dass Darstellungen $a = cos(\gamma), b = sin(\gamma), \ldots$ möglich sind:

$$a = 0 \in [-1,1] \text{ und } a^2 + b^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$
$$c = \frac{5}{13} \in [-1,1] \text{ und } c^2 + d^2 = 5^2 + 12^2 13^2 = 1$$
$$e = 0 \in [-1,1] \text{ und } e^2 + f^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

Das klappt also!