Tutorium 7

1 Skalarprodukte

Bemerkung. Für jeden komplexen Vektorraum V mit $\dim V \geq 2$ und jede komplexe Bilinearform P auf V findet man einen Vektor $v \neq 0$ mit $P(v, v) = 0$.
Es gibt also keine positiv definite Bilinearformen über V!

Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt :⇔

(i) $\langle \lambda v + w, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle w, x \rangle$
$\langle v, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle$
(Bilinearität)

(ii) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)

(iii) $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$ (Positive Definitheit)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidischer Raum.

Definition. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt komplexes Skalarprodukt :⇔

(i) $\langle \lambda v + w, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle w, x \rangle$
$\langle v, \lambda x + y \rangle = \overline{\lambda} \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle$
(Sesquilinearität)

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermitezität)

(iii) $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$ (Positive Definitheit)

Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit komplexem Skalarprodukt heißt unitärer Raum.

Beispiel. Das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T y$$

heißt Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, dieser heißt dann n-dimensionaler euklidischer Standardraum.

Beispiel.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x^T \overline{y}$$

heißt (komplexes) Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$, dieser heißt dann n-dimensionaler unitärer Standardraum.

Satz. Die Fundamentalmatrix

$$D_{B,B}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle) =: F$$

ist symmetrisch ($F^T = F$) und positiv definit, und es gilt:

$$\langle v, w \rangle = D_B(v)^T \cdot D_{B,B} \cdot D_B(w)$$

Satz. Die Fundamentalmatrix

$$D_{B,B}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle) =: F$$

ist hermitesch ($F^T = \overline{F}$) und positiv definit, und es gilt:

$$\langle v, w \rangle = D_B(v)^T \cdot D_{B,B} \cdot \overline{D_B(w)}$$

Satz (Hurwitz-Kriterium)**.** Sei $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. F ist positiv definit :⇔

$$\det F_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

Satz (Hurwitz-Kriterium)**.** Sei $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch. F ist positiv definit :⇔

$$\det F_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \quad \text{mit } F_k := (f_{i,j}) \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

Bemerkung. Es sei nun V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alles was folgt gilt aber genauso für unitäre Vektorräume!

Satz (CSU)**.** Für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \langle w, w\rangle$$

Aufgabe 1. Finde eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform B auf dem $\mathbb{R}^7$ sodass $B(m, m) = 0$ für $m = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$.

Lösung. Es genügt, eine entsprechende Fundamentalmatrix F zu finden. Wir setzen eine Diagonalmatrix an, denn diese ist symmetrisch und mit ihr lässt sich leicht rechnen:

$$\begin{aligned} & F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_7) \\ \Rightarrow\ & m^T \cdot F \cdot m = \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 4\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_7 \end{aligned}$$

Wir wählen also z.B. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_6 = 1$ und $\lambda_7 = -20$ und sind fertig, denn F hat somit vollen Rang, B ist also nicht ausgeartet!

2 Norm und Metrik

Definition. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm</u> $:\Leftrightarrow$

(i) $||v|| \geq 0$ und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v||$

(iii) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Definition. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt <u>Metrik</u> $:\Leftrightarrow$

(i) $d(x, x) \geq 0$ und $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $y \in M$

Bemerkung. Intuitiv: Normen messen Längen, Metriken messen Abstände!

Eine Metrik benötigt keinen VR!

Definition und Satz. Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ <u>induziert</u> eine Norm

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

und jede Norm $||\cdot||$ induziert eine Metrik

$$d(v, w) := ||v - w||$$

Aufgabe 2. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch die Fundamentalmatrix $F := (f_{i,j})$, $f_{i,j} := 1 + \delta_{i,j}$ gegebene Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^7$. Bestimmte die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm von $m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung.

$$||m||^2 = \langle m, m \rangle = m^T \cdot F \cdot m$$

$$= m^T \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} m + m^T m = m^T \begin{pmatrix} \sum m_i \\ \vdots \\ \sum m_i \end{pmatrix} + m^T m = \left(\sum m_i\right) m^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + m^T m = \left(\sum m_i\right)^2$$

$$= 10^2 + 20 = 120$$

3 Orthogonalität

Definition. $v, w \in V$ heißen orthogonal $:\Leftrightarrow v \perp w :\Leftrightarrow$

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Aufgabe 3. Sei V ein unitärer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

$$||w|| \leq ||\lambda v + w|| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \;\Leftrightarrow\; v \perp w$$

Beweis. Für $v = 0$ ist die Aussage trivial, wir betrachten $v \neq 0$:

$$\begin{aligned}
& \langle w, w \rangle \leq \langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle \\
\Rightarrow\; & \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \overline{\lambda} \langle w, v \rangle \geq 0 \\
\Rightarrow\; & |\lambda|^2 \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \overline{\lambda \langle v, w \rangle} \geq 0 \\
\Rightarrow\; & |\lambda|^2 \langle v, v \rangle + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle v, w \rangle) \geq 0
\end{aligned}$$

Das liefert zum einen die Rückrichtung, andererseits gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$:

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\lambda \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) \geq 0 \\
\Rightarrow\; & \lambda \langle v, v \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) \leq 0 \\
\Rightarrow\; & \lambda \leq \underbrace{-2\frac{\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle)}{\langle v, v \rangle}}_{\leq 0} \\
\Rightarrow\; & \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) = 0
\end{aligned}$$

sowie für alle $\lambda i \in \mathbb{R}_{>0} i$:

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\operatorname{Re}(\lambda i \langle v, w \rangle) \geq 0 \\
& \lambda^2 \langle v, v \rangle - 2\lambda \operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) \geq 0 \\
\Rightarrow\; & \lambda \langle v, v \rangle - 2\operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) \geq 0 \\
\Rightarrow\; & \lambda \geq \underbrace{2\frac{\operatorname{Im}(\langle v, w \rangle)}{\langle v, v \rangle}}_{\geq 0} \\
\Rightarrow\; & \operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) = 0
\end{aligned}$$

was die Hinrichtung zeigt. □

Definition. $0 \notin M \subseteq V$ heißt Orthogonalsystem (OGS) $:\Leftrightarrow$

$$\langle v, w \rangle = 0 \qquad \text{für } v, w \in M, v \neq w$$

Gilt zusätzlich $\langle v, v \rangle = 1$ für alle $v \in M$, so heißt M Orthonormalsystem (ONS).

Ist M Basis von V, so heißt M Orthogonalbasis (OGB) bzw. Orthonormalbasis (ONB).

Bemerkung. Jedes OGS lässt sich durch Normierung ($v' := \frac{v}{||v||}$) in ein ONS verwandeln.

Satz (Fourierformel)**.** Ist B eine OGB bzw. eine ONB, so gilt:

$$v = \sum_{b \in B} \frac{\langle v, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b \qquad \text{bzw.} \qquad v = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle\, b$$

Korollar. M OGS $\Rightarrow M$ l.u.

Satz (E. Schmidt)**.** Sei $v_1, \dots, v_k \subseteq V$ l.u. mit k Elementen. Dann ist die Menge $w_1, \dots, w_k$ definiert durch

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 \\ w_j &:= v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \end{aligned}$$

ein OGS mit $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$.

Definition und Satz. Sei U ein UVR von V mit $\dim U < \infty$. Dann ist das <u>orthogonale Komplement</u>

$$U^\perp := \{ v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u \}$$

ein UVR von V mit $V = U \oplus U^\perp$.
Also lässt sich jedes $v = u + u^\perp \in V$ mit $u \in U, u^\perp \in U^\perp$ schreiben, und man hat die <u>orthogonale</u> <u>Projektion</u> von V auf U:

$$\pi_U : V \to U, \quad u + u^\perp \mapsto u$$

Aufgabe 4. Sei U der von

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte UVR des $\mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie eine ONB von $U^\perp$ und die orthogonale Projektion $\pi_{U^\perp}$.

Lösung. Durch "scharfes Hinsehen"

$$\begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp u_1, u_2$$

Wir orthogonalisieren diese Vektoren mit E. Schmidt:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

und erhalten $w_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$, $w_2 := \frac{1}{\sqrt{6}} v_2$ als ONB von $U^\perp$. Fourierformel:

$$\pi_{U^\perp}(x) = \langle x, w_1 \rangle\, w_1 + \langle x, w_2 \rangle\, w_2 = \frac{1}{2} \left\langle x, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{6} \left\langle x, \left(\begin{smallmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \left(\begin{smallmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{smallmatrix}\right) = \dots$$

4 Abstände

Definition. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq V$. Dann heißt

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

der Abstand von A und B.

Definition. Seien $a \in V$ und U UVR von V. Dann heißt

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\}$$

affiner Teilraum von V. Insbesondere heißt

$$\overline{ab} := \{a + \lambda(b-a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = a + \langle b - a \rangle$$

Gerade durch a und b.

Satz. Sei $a \in V$ und U, W endlichdim. UVRe von V. Dann gilt:

$$d(a + U, W) = \left|\left|\pi_{(U+W)^\perp}(a)\right|\right|$$

Satz. Geometrische Interpretation: Das Lot verläuft orthogonal zu den Richtungen U und V!

Aufgabe 5. Sei

$$U := \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^5 \ni \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix} =: v$$

Bestimmen Sie den Abstand von v zu $U^\perp$.

Lösung.

$$d(v, U^\perp) = d(v + \{0\}, U^\perp) = \left|\left|\pi_{(U^\perp)^\perp}(v)\right|\right| = ||\pi_U(v)|| = ||v - \pi_{U^\perp}(v)||$$

Denn es scheint leichter eine ONB von $U^\perp$ zu finden: ein Basisvektor ist e_4, und Gauß auf das EZS von U zeigt, dass in der Tat $\dim U = 4$ gilt, und folglich e_4 der einzige Basisvektor von $U^\perp$ ist. Also:

$$d(v, U) = ||v - \langle v, e_4 \rangle\, e_4|| = || \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\\1\end{pmatrix} || = \sqrt{10}$$