Tutorium 5

1 Wiederholung: Tensorprodukt

Definition. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum T mit einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : V \times W \to T$$

heißt Tensorprodukt von V und W, wenn folgende universelle Abbildungseigenschaft (UAE) erfüllt wird:
Für jede bilineare Abbildung $\phi : V \times W \to U$ existiert *genau eine* lineare Abbildung $\Phi : T \to U$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, "\Phi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

(also $\phi = \Phi \circ \otimes$.)

Satz. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Tensorprodukt $V \otimes W$ (oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$).

Sind V und W endlichdimensional, dann gilt sogar:

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

Beispiel.

$V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$	$\dim V, \dim W < \infty$
Setze $T := \mathbb{K}^{n \times m}$ und $$\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^{n \times m}, (v, w) \mapsto vw^T$$ Sei nun $\phi : V \times W \to U$ bilinear. Dann soll gelten: $$\Phi(E_{i,j}) = \Phi(e_i \otimes e_j) = \phi(e_i, e_j)$$ Die $E_{i,j}$ bilden eine Basis des $K^{n \times m}$. Also definieren wir Φ gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit $\phi = \Phi \circ \otimes$ gilt.	Setze $T := \mathrm{Hom}(V^*, W)$ und $$\otimes : V \times W \to \mathrm{Hom}(V^*, W), (v, w) \mapsto \lambda \mapsto \lambda(v)w$$ Sei nun $\phi : V \times W \to U$ bilinear. Dann soll gelten: $$\Phi(b \otimes c) = \phi(b, c) \qquad \forall b \in B, c \in C$$ wobei B und C Basen von V bzw. W sind. Die $\{b \otimes c \mid b \in B, c \in C\}$ bilden eine Basis von $\mathrm{Hom}(V^*, W)$, also definieren wir Φ gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit $\phi = \Phi \circ \otimes$ gilt.

2 Multilinearformen und n-faches Tensorprodukt

Definition. Seien $V_1, \ldots, V_n$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$$

heißt (n-fach) multilinear, wenn ϕ in jedem Argument linear ist.

Definition. Seien $V_1, \ldots, V_n$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum T mit einer multilinearen Abbildung

$$\otimes^n : V_1 \times \ldots \times V_n \to T$$

heißt (n-faches) Tensorprodukt, wenn die folgende UAE gilt:
Für jede multilineare Abbildung $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to U$ existiert *genau eine* lineare Abbildung $\Phi : T \to U$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[r, "\otimes^n"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, "\Phi"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

(also $\phi = \Phi \circ \otimes^n$.)

Definition. Seien $V_1, \ldots, V_n, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir definieren induktiv:

$$\bigotimes_{i=1}^{n} V_i := V_1 \otimes \ldots \otimes V_n := (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$
$$\otimes^n (v_1, \ldots, v_n) := v_1 \otimes \ldots \otimes v_n := (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n$$

(für $n \geq 3$)

Aufgabe 1 (Existenz)**.** Seien $V_1, \ldots, V_n, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ ein Tensorprodukt ist.

Beweis. [v.I. über n] Für $n = 2$ ist nichts mehr zu zeigen; wir betrachten $n \to n+1$:
Sei $\phi : V_1 \times \ldots \times V_{n+1} \to W$ $(n+1)$-fach multilinear. Wir betrachten nun für ein festes $x \in V_{n+1}$:

$$\phi_x : V_1 \times \ldots \times V_n \to W, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \phi(v_1, \ldots, v_n, x)$$

Diese Abbildung ist n-fach multilinear; nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Phi_x : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W \qquad \text{mit } \phi_x = \Phi_x \circ \otimes^n$$

Betrachte nun

$$\psi : (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n) \times V_{n+1} \to W, \quad (v, x) \mapsto \phi_x(v)$$

Diese Abbildung ist bilinear, nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Psi : (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n) \otimes V_{n+1} \to W \qquad \text{mit } \psi = \Psi \circ \otimes$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} & \phi(v_1, \ldots, v_{n+1}) = \phi_{v_{n+1}}(v_1, \ldots, v_n) = \Phi_{v_{n+1}}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \\ = \; & \psi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, v_{n+1}) = \Psi((v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \otimes v_{n+1}) \end{aligned}$$

Ψ ist also die gesuchte lineare Abbildung, die UAE ist erfüllt. □

Bemerkung. Genauso wie beim "normalen" Tensorprodukt beweist man die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie). Daher macht die Schreibweise oben Sinn, und auch weil das folgende "Assoziativgesetz" gilt:

$$U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$$

Definition. Eine multilineare Abbildung $\phi : V^n \to W$ heißt <u>alternierend</u>, wenn gilt:

$$\phi(v_1, \ldots, v_n) = 0 \qquad \text{falls } v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j$$

Korollar. Sei $\phi : V^n \to W$ eine alterniernde multilineare Abbildung. Dann gilt:

(i) $\phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots v_n) = -\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_n)$

(ii) $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 0$

Für $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ gilt auch die Umkehrung von (i).

Aufgabe 2. Sei $\phi : V^n \to W$ eine alternierende multilineare Abbildung, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie:

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \ldots, v_n)$$

Beweis. Wir können σ als Produkt von Transpositionen schreiben:

$$\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$$

und wissen, dass $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k$ gilt. Aber nach dem Korollar hat man

$$\phi(v_{\tau_i(1)}, \ldots, v_{\tau_i(n)}) = -\phi(v_1, \ldots, v_n)$$

und induktiv führt das zu

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^k \cdot \phi(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \ldots, v_n)$$

□

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann gibt es zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum W und $w_{i,j} \in W$ (für $1 \leq i < j \leq n$) genau eine alternierende bilineare Abbildung $\phi : V \times V \to W$ mit $\phi(b_i, b_j) = w_{i,j}$.

Bemerkung. Analog für V^k für $k \leq n$ (mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$).

3 Äußeres und symmetrisches Produkt

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum O mit einer multilinearen *alternierenden* Abbildung

$$\wedge^n : V^n \to O$$

heißt (n-tes) äußeres Produkt von V, wenn gilt:

Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum P und jede n-fache multilineare *alternierende* Abbildung $\phi : V^n \to P$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi : O \to P$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\wedge^n"] \arrow[dr, "\phi"'] & O \arrow[d, "\Phi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

(also $\phi = \Phi \circ \wedge^n$.)

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum S mit einer multilinearen *symmetrischen* Abbildung

$$s : V^2 \to S$$

heißt (2-faches) symmetrisches Produkt von V, wenn gilt:
Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum T und jede 2-fache multilineare *symmetrische* Abbildung $\phi : V^n \to T$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi : S \to T$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^2 \arrow[r, "s^2"] \arrow[dr, "\phi"'] & S \arrow[d, "\Phi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

(also $\phi = \Phi \circ s$.)

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) n-tes *äußeres* Produkt $\bigwedge^n V$.

Beweis. Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt.
Sei $T := V \otimes \ldots \otimes V$ mit $\otimes^n : V^n \to T$ das n-fache Tensorprodukt, und

$$U := \langle \{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mid v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j\} \rangle$$

Setze $\bigwedge^n V := T/U$. Die Komposition

$$\wedge^n : V^n \to \bigwedge\nolimits^n V, \quad \wedge^n = \kappa \circ \otimes^n$$

(mit der kanonischen Projektion κ) ist dann bilinear und *alternierend*, denn

$$\begin{aligned} & \wedge^n (v_1, \ldots, v_n) \\ = \; & \kappa(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = 0 \end{aligned}$$

(falls $v_i = v_j$ für ein $i \neq j$).
Sei nun $\phi : V^n \to P$ multilinear und *alternierend*. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung $\Phi : T \to P$ mit $\phi = \Phi \circ \otimes^n$.
Da ϕ *alternierend* ist, gilt $U \subseteq \operatorname{Kern} \Phi$, und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{\Phi} : \bigwedge^n V \to P$ mit $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$, also $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^n = \bar{\Phi} \circ \wedge^n$. □

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) 2-faches *symmetrisches* Produkt S.

Beweis. Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt.
Sei $T := V \otimes V$ mit $\otimes^2 : V^2 \to T$ das 2-fache Tensorprodukt, und

$$U := \langle \{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\} \rangle$$

Setze $S := T/U$. Die Komposition

$$s : V^2 \to S, \quad s = \kappa \circ \otimes^2$$

(mit der kanonischen Projektion κ) ist dann bilinear und *symmetrisch*, denn

$$\begin{aligned} & s(v, w) - s(w, v) = \kappa(v \otimes w) - \kappa(w \otimes v) \\ = \; & \kappa(v \otimes w - w \otimes v) = 0 \end{aligned}$$

Sei nun $\phi : V^2 \to P$ multilinear und *symmetrisch*. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung $\Phi : T \to P$ mit $\phi = \Phi \circ \otimes^2$.
Da ϕ *symmetrisch* ist, gilt $U \subseteq \operatorname{Kern} \Phi$, und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{\Phi} : S \to P$ mit $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$, also $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^2 = \bar{\Phi} \circ s$. □

Bemerkung. Statt $\wedge^n(v_1, \ldots, v_n)$ schreibt man oft auch $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ ist eine Basis von $\bigwedge^k V$ ($\dim V = n$).
Folglich gilt: $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$.

4 Äußere direkte Summe

Definition und Satz. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist $V \times W$ mit

$$\begin{aligned}(v,w)+(x,y) &:= (v+x, w+y)\\ \lambda \cdot (v,w)) &:= (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)\end{aligned}$$

ein Vektorraum, die sogenannte <u>äußere direkte Summe</u>.

Aufgabe 4. Seien V, W Vektorräume. Zeigen Sie: V und W können als UVRe von $V \times W$ aufgefasst werden, so dass die innere direkte Summe dieser UVRe gerade $V \times W$ ergibt.

Beweis. Die Abbildungen

$$\begin{aligned}&i : V \to V \times W, v \mapsto (v,0)\\ &j : W \to V \times W, w \mapsto (0,w)\end{aligned}$$

sind injektiv und linear, folglich können wir V und W mit den UVRen $i(V) = V \times \{0\}$ bzw. $j(W) = \{0\} \times W$ identifizieren (d.h. die Vektorräume sind jeweils isomorph).
Wegen $(V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0,0)\}$ ist die innere Summe $i(V) \oplus i(W)$ direkt, und wegen $(v,w) = (v,0) + (0,w)$ gilt $i(V) \oplus i(W) = V \times W$. $\square$