Tutorium 4

1 Bilinearformen

Definition. Seien U, V, W Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \times W \to U$ heißt bilinear: $\Leftrightarrow$

$$\Phi(\alpha v + w, x) = \alpha \cdot \Phi(v, x) + \Phi(w, x) \quad \text{und} \quad \Phi(v, \beta x + y) = \beta \cdot \Phi(v, x) + \Phi(v, y)$$

Bemerkung. Dies ist äquivalent zu:

$$\Phi(\alpha v + w, \beta x + y) = \alpha\beta \cdot \Phi(v, x) + \alpha \cdot \Phi(v, y) + \beta \cdot \Phi(w, x) + \Phi(w, y)$$

Oder, nochmal anders formuliert, sind $v \mapsto \Phi(v, w)$ und $w \mapsto \Phi(v, w)$ für feste w bzw. v linear.

Definition. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann heißt eine bilineare Abbildung

$$P : V \times W \to \mathbb{K}$$

Paarung zwischen V und W.

Eine Paarung heißt Bilinearform, falls $V = W$.

Eine Paarung P heißt nicht ausgeartet, wenn gilt:

(i) Zu jedem $0 \neq v \in V$ existiert ein $w \in W$ mit $P(v, w) \neq 0$

(ii) Zu jedem $0 \neq w \in W$ existiert ein $v \in V$ mit $P(v, w) \neq 0$

Beispiel (Dualraum I)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V^* sein Dualraum, also $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Dann hat man die nicht ausgeartete Paarung

$$P : \begin{cases} V \times V^* \to \mathbb{K} \\ (v, \lambda) \mapsto \lambda(v) \end{cases}$$

Bemerkung. Die Menge $\mathcal{P}$ aller Paarungen zwischen V und W ist ein UVR von $\mathrm{Abb}(V \times W, \mathbb{K})$.

Für jede Paarung $P : V \times W \to \mathbb{K}$ erhält man eine lineare Abbildung

$$\phi_P : W \to V^*, \; w \mapsto v \mapsto P(v, w)$$

Ist andererseits $\phi \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$, so hat man die Paarung

$$P_\phi : V \times W \to \mathbb{K}, \; (v, w) \mapsto \phi(w)(v)$$

Aber so ergibt sich ein Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathrm{Hom}(W, V^*), \; P \mapsto \phi_P$$

mit

$$\Phi^{-1} : \mathrm{Hom}(W, V^*) \to \mathcal{P}, \; \phi \mapsto P_\phi$$

denn

$$\Phi^{-1}(\Phi(P))(v, w) = P_{\phi_P}(v, w) = \phi_P(w)(v) = P(v, w)$$

und man erhält das folgende Lemma.

Lemma. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Paarungen zwischen V und W. Dann gilt:

$$\mathcal{P} \cong \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

Bemerkung. Sei $P : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Paarung, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ eine Basis von W. Dann gilt für alle $v = \sum_{i=1}^m v_i b_i, w = \sum_{j=1}^n w_j c_j$:

$$P(v, w) = P(\sum_{i=1}^m v_i b_i, \sum_{j=1}^n w_j c_j) = \sum_{i,j} v_i w_j P(b_i, c_j)$$

Die Paarung wird also durch die Restriktion $P|_{B\times C} : B \times C \to \mathbb{K}$ eindeutig definiert. Andersrum erhält man für jede Abbildung $p : B \times C \to \mathbb{K}$ eine Paarung, die sogenannte <u>bilineare Fortsetzung</u>!

Wir definieren die sogenannte <u>Fundamentalmatrix</u> $D_{B,C}(P) := F := (f_{i,j})$ mit $f_{i,j} := P(b_i, c_j)$. Es gilt dann nämlich:

$$P(v, w) = \sum_{i,j} v_i f_{i,j} w_j = \sum_i v_i (Fw)_i = v^T F w$$

und so erhält man das folgende Lemma:

Lemma. (i) $P(v, w) = D_B(v)^T \cdot D_{B,C}(P) \cdot D_C(w)$

(ii) P nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ $\dim B = \dim C$ und $D_{B,C}$ regulär

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Fundamentalmatrix der Bilinearform $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ bezüglich der Standardbasis.

Lösung. Also $B := \{b_1, b_2\} := \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$, und folglich:

$$f_{1,1} = \det(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = 0$$

$$f_{1,2} = \det(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = 1$$

$$f_{2,1} = \det(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = -1$$

$$f_{2,2} = \det(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = 0$$

$$\Rightarrow D_{BB} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

und das macht auch Sinn, denn es gilt wirklich:

$$\det(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\-b\end{pmatrix} = ad - bc$$

Und natürlich ist det nicht ausgeartet wegen $\det(\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}) = 1$.

Lemma (Basiswechsel)**.** Sei $P : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Paarung, $B, \tilde{B}$ Basen von V und $C, \tilde{C}$ Basen von W. Dann gilt:

$$D_{B,C}(P) = D^T_{\tilde{B},B}(\mathrm{id}_V) \cdot D_{\tilde{B},\tilde{C}}(P) \cdot D_{\tilde{C},C}(\mathrm{id}_W)$$

Bemerkung. Es gibt also zu jeder nicht ausgearteten Paarung Basen, so dass die Paarung die Einheitsmatrix als Fundamentalmatrix hat: Betrachte zunächst die Fundamentalmatrix F bezüglich einer beliebigen Matrix, und führe dann einen Basiswechsel der Form F^{-1} für eine der beiden Basen durch.

Bemerkung. Wir hatten ja oben zu jeder Paarung $P : V \times W \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung $\phi : W \to V^*$ mit:

$$P(v, w) = \phi(w)(v)$$

Sei nun B eine Basis von V, B^* die zugehörige Dualraumbasis und C eine Basis von W. Dann erinnern wir uns daran, dass $b_i^*(v)$ gerade die Koordinate von v bezüglich des Basisvektors b_i ist, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{m} b_i^*(v) \cdot b_i$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\phi(w)(v) = \phi(w)(\sum_{i=1}^{m} b_i^*(v) \cdot b_i) = \sum_{i=1}^{m} b_i^*(v) \cdot \phi(w)(b_i) = \sum_{i=1}^{m} P(b_i, w) \cdot b_i^*(v) \\
\Rightarrow\ &\phi(w) = \sum_{i=1} P(b_i, w) \cdot b_i^* \\
\Rightarrow\ &D_{B^*,C}(\phi) \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(b_1, w) \\ \dots \\ P(b_m, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot P(b_1, c_1) + \ldots + w_n \cdot P(b_1, c_n) \\ \dots \\ w_1 \cdot P(b_m, c_1) + \ldots + w_n \cdot P(b_m, c_n) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ &\boxed{D_{B^*,C}(\phi) = D_{B,C}(P)}
\end{aligned}$$

Beispiel (Dualraum II)**.** Wir betrachten wieder die Paarung

$$P : \begin{cases} V \times V^* \to \mathbb{K} \\ (v, \lambda) \mapsto \lambda(v) \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\phi_P(\lambda)(v) = \lambda(v) \\
\Rightarrow\ &\phi_P(\lambda) = \lambda \\
\Rightarrow\ &\phi_P = \mathrm{id}_{V^*}
\end{aligned}$$

Nach der Bemerkung gilt dann:

$$D_{B,B^*}(P) = D_{B^*,B^*}(\phi_P) = I_n$$

Definition. Eine Bilinearform $P : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt symmetrisch: $\Leftrightarrow$

$$\forall v, w \in V : \quad P(v, w) = P(w, v)$$

und alternierend: $\Leftrightarrow$

$$\forall v, w \in V : \quad P(v, w) = -P(w, v)$$

Bemerkung. (i) Bilinearformen $\leftrightarrow$ Paarungen wie Endomorphismen $\leftrightarrow$ Homomorphismen. Analog wählt man auch hier meist $B = C$, wenn man Fundamentalmatrizen untersucht.

(ii) Ist P symmetrisch, so auch die Fundamentalmatrix, also $D_{B,B}(P) = D_{B,B}(P)^T$ bezüglich jeder Basis B.

(iii) Ist P alternierend, so gilt analog $D_{B,B}(P) = -D_{B,B}(P)^T$. Außerdem sieht man sofort, dass $P(v,v) = 0$ für alle v.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik $\neq 2$, und $s : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass es eine symmetrische Bilinearform $s^+ : V \times V \to \mathbb{K}$ und eine alternierende Bilinearform $s^- : V \times V \to \mathbb{K}$ gibt, so dass $s = s^+ + s^-$.

Beweis. Setze

$$s^+ : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{K} \\ (v,w) \mapsto \dfrac{s(v,w)+s(w,v)}{2} \end{cases} \qquad s^- : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{K} \\ (v,w) \mapsto \dfrac{s(v,w)-s(w,v)}{2} \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind symmetrisch bzw. alternierend:

$$\begin{aligned} s^+(v,w) &= \frac{s(v,w)+s(w,v)}{2} = \frac{s(w,v)+s(v,w)}{2} = s^+(w,v) \\ s^-(v,w) &= \frac{s(v,w)-s(w,v)}{2} = -\frac{s(w,v)-s(v,w)}{2} = -s^-(w,v) \end{aligned}$$

Und wegen der Symmetrie/Alternierendheit ist nur die Linearität im ersten Argument zu zeigen:

$$\begin{aligned} s^+(\alpha v + w, x) &= \frac{s(\alpha v + w, x) + s(x, \alpha v + w)}{2} = \frac{\alpha s(v,x) + s(w,x) + \alpha s(x,v) + s(x,w)}{2} \\ &= \alpha \frac{s(v,x)+s(x,v)}{2} + \frac{s(w,x)+s(x,w)}{2} = \alpha s^+(v,x) + s^+(w,x) \\ s^-(\alpha v + w, x) &= \frac{s(\alpha v + w, x) - s(x, \alpha v + w)}{2} = \frac{\alpha s(v,x) + s(w,x) - \alpha s(x,v) - s(x,w)}{2} \\ &= \alpha \frac{s(v,x)-s(x,v)}{2} + \frac{s(w,x)-s(x,w)}{2} = \alpha s^-(v,x) + s^-(w,x) \end{aligned}$$

□

Definition. Eine Basis $B := b_1, \dots, b_n$ von V heißt Orthogonalbasis (OGB) bezüglich P: ⇔

$$P(b_i, b_j) = 0 \quad (\forall 1 \leq i \neq j \leq n)$$

Sie heißt Orthonormalbasis (ONB) bezüglich P: ⇔

$$P(b_i, b_i) = 1 \quad (\forall 1 \leq i \leq n)$$

Bemerkung. Gibt es eine Orthogonalbasis B, so ist P symmetrisch.

Lemma. Sei $\dim V < \infty$, $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ und $P : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine OGB von V bezüglich P (und auch eine ONB, falls $\mathbb{K}$ genügend Quadrate enthält).

Satz (Fourierformel)**.** Sei B eine ONB bezüglich P, und $x \in V$. Dann gilt:

$$x = \sum_{b \in B} P(x,b) \cdot b$$

Beweis. Sei $x = \sum_{b \in B} \alpha(b) \cdot b$. Dann gilt:

$$P(x, c) = P(\sum_{b \in B} \lambda(b) \cdot b, c) = \sum_{b \in B} \lambda(b) \cdot P(b, c) = \lambda(c) \cdot P(c, c) = \lambda(c)$$

$\square$

2 Tensorprodukte

Definition. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum T mit einer bilinearen Abbildung

$$\tau : V \times W \to T$$

heißt Tensorprodukt von V und W, wenn folgende universelle Abbildungseigenschaft (UAE) erfüllt wird: Für jede bilineare Abbildung $\alpha : V \times W \to U$ existiert *genau eine* lineare Abbildung $\Phi_\alpha : T \to U$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\alpha"'] & T \arrow[d, "\Phi_\alpha"] \\
 & U
\end{tikzcd}$$

(also $\alpha = \Phi_\alpha \circ \tau$.)

Bemerkung. (i) Existiert ein Tensorprodukt T, so entsprechen die bilinearen Abbildungen von $V \times W \to U$ gerade $\mathrm{Hom}(T, U)$.

(ii) Das Tensorprodukt ist eindeutig bis auf Isomorphie.

Beispiel. Zu $V := \mathbb{K}^n$, $W := \mathbb{K}^m$ ist $T := \mathbb{K}^{n \times m}$ mit

$$\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^{n \times m}, \ (v, w) \mapsto v \cdot w^T$$

ein Tensorprodukt. Die Bilinearität von $\otimes$ klar, und sei $\alpha : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to U$ gegeben, so muss für Φ_α gelten:

$$\alpha(e_i, e_j) = \Phi_\alpha(e_i \otimes e_j) = \Phi_\alpha(E_{i,j})$$

Die $E_{i,j}$ bilden eine Basis des $\mathbb{K}^{n \times m}$, wir können (und müssen!) Φ_α also durch lineare Fortsetzung aus dieser Vorschrift erhalten, und es gilt dann:

$$\alpha(v, w) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{m} w_j e_j) = \sum_{i,j} v_i w_j \alpha(e_i, e_j) = \sum_{i,j} v_i w_j \Phi_\alpha(E_{i,j}) = \Phi_\alpha(\sum_{i,j} v_i w_j E_{i,j}) = \Phi_\alpha(v \otimes$$

$$\Rightarrow \ \alpha = \Phi_\alpha \circ \otimes$$

Also erfüllen (T, τ) die UAE.

Mittels Basenwahl führt eine solche Konstruktion für beliebige endliche Vektorräume V, W zum Erfolg.

Aufgabe 3. Wieso ist $T := \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ mit

$$\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m, (v, w) \mapsto (v, w)$$

kein Tensorprodukt?

Lösung. $\otimes$ ist nicht bilinear.

Beispiel. Sei nun $\dim V$, $\dim W < \infty$. Wir wählen $T := \mathrm{Hom}(V^*, W)$ und definieren $\otimes$ auf die einzige natürliche Weise als

$$\otimes : V \times W \to \mathrm{Hom}(V^*, W),\ (v, w) \mapsto \lambda \mapsto \lambda(v)w$$

Diese Abbildung ist bilinear, und sind B, C Basen von V bzw. W, so rechnet man aus, dass die

$$\{b \otimes c \mid b \in B, c \in C\}$$

analog zum ersten Beispiel eine Basis von $\mathrm{Hom}(V^*, W)$ bilden, was genauso die UAE liefert.

Satz. Zu je zwei beliebigen Vektorräumen V, W existiert ein Tensorprodukt $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

Sind V, W endlichdimensional, so gilt zusätzlich:

$$\dim V \cdot \dim W = \dim(V \otimes_{\mathbb{K}} W)$$