Tutorium 3

1 Nilpotente Endomorphismen

Definition. Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Φ heißt nilpotent:

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad \Phi^n = 0$$

Bemerkung. Sei $V \neq \{0\}$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger EW. Und wegen

$$H(\Phi, 0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Kern}((\Phi - 0 \cdot \mathrm{id})^k) \supseteq \mathrm{Kern}(\Phi^n) = \mathrm{Kern}(0) = V$$

gilt nach dem Satz von letztem Mal $H(\Phi, 0) = V$ und $\mathrm{CP}_\Phi(X) = X^{\dim V}$.

Sei nun X^d das Minimalpolynom von Φ, und $u \in V$ mit $\Phi^{d-1}(u) \neq 0$. Betrachte

$$U := \left\langle \underbrace{u, \Phi(u), \ldots, \Phi^{d-1}(u)}_{:=B} \right\rangle$$

Es ist klar, dass $\dim U \leq d$. Andererseits ist $\Phi|_U$ auch nilpotent, und es gilt

$$\dim U = \mathrm{Grad}\,\mathrm{CP}_{\Phi|_U}(X) \geq \mathrm{Grad}\,\mathrm{MP}_{\Phi|_U}(X) \geq d$$

da $\Phi^{d-1}(u) \neq 0$. Bezüglich B hat $\Phi|_U$ dann die Abbildungsmatrix:

$$J_d(0) := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt Jordankästchen der Länge d zum EW 0.

Lemma aus der Vorlesung sagt: Es gibt ein Φ-invariantes Komplement zu $U \Rightarrow$ vollständige Induktion liefert den folgenden Satz:

Satz. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine nilpotente Matrix. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k und $d_1 \geq \ldots \geq d_k \geq 1$ sodass A ähnlich ist zu folgender Matrix:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt Jordansche Normalform (JNF) von A.

Bemerkung. Für die Anzahl der Jordankästchen gilt:

$$k = \dim \mathrm{Eig}(\Phi, 0) = \dim \mathrm{Kern}(\Phi)$$

wie man durch Betrachten der JNF erkennt.

Aufgabe 1. Sei $\Phi \in \operatorname{End}(V)$, $\dim V = 4$ und $\operatorname{Bild}(\Phi) \subseteq \operatorname{Kern}(\Phi)$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Minimalpolynom und Jordansche Normalform.

Lösung. Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in V$:

$$\begin{aligned} & \Phi(\Phi(x)) = 0 \\ \Rightarrow\ & \Phi^2 = 0 \end{aligned}$$

Also ist Φ nilpotent, und also $\mathrm{CP}_\Phi(X) = X^4$.

Außerdem ist X^2 annullierendes Polynom, folglich $\mathrm{MP}_\Phi(X) \in \{X, X^2\}$. Es gilt aber:

$$\mathrm{MP}_\Phi(X) = X \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Rang}(\Phi) = 0$$

Also treffen wir eine Fallunterscheidung nach $r := \operatorname{Rang}(\Phi)$.

1. Fall: $r = 0 \Leftrightarrow k = 4$, und die Jordansche Normalform ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Fall: $r = 1 \Leftrightarrow k = 3$, und es folgt zwingend:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(denn $4 = 2 + 1 + 1$ ist ohne Beachtung der Reihenfolge die einzige Zerlegung der 4 in 3 Summanden)

3. Fall: $r = 2 \Leftrightarrow k = 2$, wir haben zwei mögliche Zerlegungen $4 = 3 + 1 = 2 + 2$ in 2 Summanden. Aber wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

kann es kein Jordankästchen der Länge ≥ 3 geben, wir erhalten also als JNF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Fall: $r = 3 \Leftrightarrow k = 1$, aber dann hätten wir ein Jordankästchen der Länge 4, was ja nicht möglich ist.

2 Die Jordansche Normalform

Definition. Die Matrix

$$J_d(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt Jordankästchen der Länge d zum EW λ.

Bemerkung. Sei nun $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren. Wir wissen:

$$V = \bigoplus_{\lambda} H(\Phi, \lambda), \qquad H(\Phi, \lambda) = \mathrm{Kern}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{\mu_a(\Phi,\lambda)})$$

Also ist $(\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})|_{H(\Phi,\lambda)}$ nilpotent, es gibt also eine Darstellung als JNF bestehend aus Jordankästchen $J_{d_i}(0)$.

Aber es gilt ja:

$$\Phi|_{H(\Phi,\lambda)} = \lambda \cdot \mathrm{id}_{H(\Phi,\lambda)} \quad + \quad (\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})|_{H(\Phi,\lambda)}$$

Folglich gibt es für $\Phi|_{H(\Phi,\lambda)}$ eine Darstellung als sogenanntem Jordanblock, bestehend aus Jordankästchen der Form $J_{d_i}(\lambda)$.

Macht man das für jeden EW λ, so erhält man den folgenden Satz:

Satz. Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$, und das charakteristische Polynom von Φ zerfalle in Linearfaktoren. Weiterhin seien

$$\mathrm{Spec}(\Phi) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_l\}$$

die l EWe von Φ.
Dann gibt es für jeden EW λ_i eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k_i und $d_{1,i} \geq \ldots \geq d_{k_i,i} \geq 1$ sodass Φ bezüglich einer geeigenetes Basis B die Abbildungsmatrix in Jordanscher Normalform (JNF)

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix}$$

hat, wobei

$$D_i := \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k_i,i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

der Jordanblock zum i-ten EW ist.

Bemerkung. Es gelten:

(i) Die JNF ist eindeutig bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke/Eigenwerte.

(ii) Länge des Blocks zum EW $\lambda = \dim H(\Phi, \lambda) = \mu_a(\Phi, \lambda)$

(iii) Anzahl Kästchen zum EW $\lambda = k_i = \dim \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda) = \mu_g(\Phi, \lambda)$

(iv) Länge des größtes Kästchens zum EW λ = Exponent von $(X - \lambda)$ im Minimalpolynom!

(v) Für die Anzahl der Jordankästchen der Länge d zum EW λ gilt:

$$m_d(\lambda) = \mathrm{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{d-1}) - 2 \cdot \mathrm{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{d}) + \mathrm{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{d+1})$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

sowie eine Matrix $S \in GL_4(\mathbb{R})$ sodass $S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform ist.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}_A(X) &= \det(\begin{pmatrix} X+3 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & X-3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & X-2 & 1 \\ -4 & 4 & -4 & X+2 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} X+1 & -1 & X & 0 \\ 1 & X-1 & X & 0 \\ -2 & 2 & X-2 & 1 \\ 2X & -2X & -X^2 & 0 \end{pmatrix}) \\
&= -\det(\begin{pmatrix} X+1 & -1 & X \\ 1 & X-1 & X \\ 2X & -2X & -X^2 \end{pmatrix}) = -X^2 \cdot \det(\begin{pmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}) \\
&= -X^2 \cdot \det(\begin{pmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ X & -X & 0 \\ X+3 & -3 & 0 \end{pmatrix}) = -X^2 \cdot \det(\begin{pmatrix} X & -X \\ X+3 & -3 \end{pmatrix}) \\
&= -X^2 \cdot (-3X + X^2 + 3X) = -X^4
\end{aligned}$$

Folglich gibt es genau einen Jordanblock, und zwar zum EW 0.

Es gilt $A^2 = 0$, also gilt

$$\mathrm{MP}_A(X) = X^2$$

und das größte Jordankästchen hat Länge 2.

Wir berechnen nun $\mathrm{Eig}(A, 0) = \mathrm{Kern}(A)$, denn dessen Dimension liefert uns ja die Anzahl Jordankästchen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es gibt also 2 Jordankästchen, wir erhalten folgende Jordansche Normalform:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir finden wir die Jordanbasis? Wir suchen 2 Vektoren b_1, b_3 in $\mathrm{Kern}(A^2) \setminus \mathrm{Kern}(A)$, so dass $b_2 := Ab_1, b_4 := Ab_3$ linear unabhängig sind! Wir setzen an:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b_2 := Ab_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_4 := Ab_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und scheinen erfolgreich gewesen zu sein! Also:

$$S = \big(b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4\big) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

und tatsächlich gilt $S^{-1}AS = \tilde{A}$.

Aufgabe 3. Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = 5$, $\dim \mathrm{Kern}(\Phi) = 1$ und $\mathrm{CP}_\Phi(X) = X^5 - 9X^3$. Berechnen Sie die Jordansche Normalform von Φ^2.

Lösung. Wir berechnen zunächst die Jordansche Normalform von Φ. Wegen $CP_\Phi(X) = X^3(X-3)(X+3)$ interessiert uns nur noch die Anzahl Jordankästchen zum Eigenwert 0, und die ist ja gerade gleich $\dim \mathrm{Kern}(\Phi) = 1$. Also ist die JNF von Φ:

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$J^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ist eine Abbildungsmatrix von Φ^2!

Also gilt $CP_{J^2}(X) = X^3(X-9)^2$, und uns interessiert wieder nur die Anzahl Jordankästchen zum Eigenwert 0, also $\dim \mathrm{Kern}(\Phi^2) = \dim \mathrm{Kern}(J^2) = 2$ (denn es gibt offenbar genau 3 l.u. Zeilen). Folglich ist die JNF von Φ^2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$