# Tutorium 1

## 1 Einführung

**Email** michael.walter@gmail.com

**Homepage** http://math.leetspeak.org/la2/

## 2 Themen LA 1

**Algebraische Strukturen** wie Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum mit zugehörigen Homomorphismen (insbesondere lineare Abbildungen).

**LGSe, Matrizen und lineare Abbildungen** mit Gauß-Algorithmus, Rang vs. Lösbarkeit ($Ax = b, A \in K^{m \times n}$, schreiben als $\Phi : K^n \to K^m$, $\text{Rang}(A) = \dim(\text{Bild}(\Phi)) \Rightarrow$
$\text{Rang}(A) = m \Leftrightarrow$ surjektiv $\Leftrightarrow$ LGS lösbar für jedes b,
$\text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \text{Kern}(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow$ injektiv $\Leftrightarrow$ jede Lösung ist eindeutig)

**Homomorphiesatz und Faktorraum**

**Basen** als maximal linear unabhängige Teilmengen bzw. minimale Erzeugendensysteme

**Eigenwerte, -vektoren und -räume**

**Determinante**

## 3 Die symmetrische Gruppe

**Wiederholung.** $(G, \cdot)$ heißt Gruppe $:\Leftrightarrow$

(i) $\cdot : G \times G \to G$ ist eine assoziative Verknüpfung

(ii) $\exists e_G \in G : \forall x \in G : e_G \cdot x = x = x \cdot e_G$ (neutrales Element)

(iii) $\forall x \in G : \exists y \in G : x \cdot y = e_G = y \cdot x$ (alle Elemente invertierbar)

Die Ordnung einer Gruppe ist die Anzahl Elemente; die Ordnung $\text{ord}(x)$ eines Elements ist Ordnung der von $x$ erzeugten Untergruppe $\langle x \rangle$, also das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = e_G$.

Satz von Lagrange: Ordnung jeder Untergruppe teilt Ordnung der Gruppe.

**Definition.** Sei $M$ eine Menge. Dann heißt die Gruppe

$$(\{\sigma \in Abb(M, M) \mid \sigma \text{ bijektiv}\}, \circ)$$

symmetrische Gruppe $S_M$ von $M$.

Für $M = \{1, \ldots, n\}$ setzt man auch $S_n := S_M$.

**Korollar.** (1) Neutrales Element ist $\text{id}_{\{1,\ldots,n\}} =: \text{id}$.

(2) $\#S_M = \#M!$, insbesondere $\#S_n = n!$.

**Definition.** Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich durch seine Wertetabelle darstellen. Wir schreiben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(analog für beliebige endliche $M$).

**Definition.** Sei $S := \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#S = k$. Eine Permutation $\sigma$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_{i+1} \quad (i < k) \\ \sigma(a_k) &= a_1 \\ \sigma(n) &= n \quad (n \notin S) \end{aligned}$$

heißt Zykel der Länge $k$. Wir schreiben dann auch $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

Falls $k = 2$, dann heißt $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ Transposition.

**Satz.** (1) Jede Permutation lässt sich als Produkt disjunkter Zykeln darstellen (eindeutig bis auf die Reihenfolge).

(2) Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen (*nicht* eindeutig).

**Aufgabe 1.** Schreiben Sie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 9 & 4 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$ als Produkt disjunkter Zykel sowie als Produkt von Transpositionen.

*Lösung.*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Wie schreibt man Zykel als Transpositionen?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

oder

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**Korollar.** (1) $S_n$ wird von den Transpositionen erzeugt.

(2) Jeder Gruppenhomomorphismus $\Phi : S_n \to G$ ist durch die Bilder der Transpositionen eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 2.** Sei $G$ eine endliche Gruppe ungerader Ordnung. Zeigen Sie: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist der einzige Homomorphismus von $S_m$ nach $G$ der triviale.

*Beweis.* Erinnerung: Der triviale Homomorphismus ist $\Phi : S_m \to G, x \mapsto e_G$.

Nach dem Korollar genügt es zu zeigen, dass jede Transposition auf $e_G$ abgebildet wird. Sei also $\tau \in S_m$ eine Transposition. *Annahme*: $\Phi(\tau) = x \neq e_G$. Es folgt:

$$e_G = \Phi(\mathrm{id}) = \Phi(\tau \circ \tau) = \Phi(\tau) \cdot \Phi(\tau) = x^2$$

Es gilt also $\mathrm{ord}(x) = 2$, also nach Lagrange $2 \mid \#G$. Widerspruch! □

**Aufgabe 3.** Finden Sie alle Elemente von $S_3$.

*Lösung.* Es gibt nach der Bemerkung oben $3! = 6$ Stück. Also besteht $S_3$ aus den 6 Elementen:

$$\begin{aligned}&\mathrm{id},\\ &\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

denn diese liegen in $S_3$ und sind paarweise verschieden.

**Definition.** Die Abbildung:

$$\mathrm{sign} : \begin{cases} S_n \to \{1, -1\} \\ \sigma \mapsto \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \end{cases}$$

heißt Signum.

**Satz.** (1) sign ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus zwischen $S_n$ und $(\{1, -1\}, \cdot)$.

(2) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\mathrm{sign}(\tau) = -1$.

**Korollar.** (1) Das Signum einer Permutation $\sigma$, die sich als Produkt von $k$ Transpositionen schreiben lässt, ergibt sich als $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^k$.

(2) Die Anzahl Transpositionen ist in jeder Transpositionsdarstellung einer Permutation gerade oder ungerade.

*Beweis.* Sei $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ eine Transpositionsdarstellung. Dann gilt:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) = \mathrm{sign}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sign}(\tau_k) = (-1)^k$$

was (1) zeigt.

Also gilt für je zwei Darstellungen mit $k$ bzw. $l$ Transpositionen:

$$(-1)^k = (-1)^l$$

was (2) zeigt. □

**Beispiel.** In Aufgabe 1 gilt: $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_{11}$ die Multiplikation mit $\bar{2}$ eine Permutation ist (also dass $\sigma : \mathbb{F}_{11} \to \mathbb{F}_{11}, n \mapsto \bar{2}n \in S_{\mathbb{F}_{11}}$). Schreiben Sie $\sigma$ als Produkt von Transpositionen.

*Lösung.* $\mathbb{F}_{11}$ ist Körper, also liegt $\bar{2}^{-1} = \bar{6}$ in $\mathbb{F}_{11}$ und $\sigma$ ist bijektiv mit $\sigma^{-1} : n \mapsto \bar{6}n$. Also gilt $\sigma \in S_{\mathbb{F}_{11}}$.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{8} & \bar{9} & \bar{10} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{10} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{8} & \bar{5} & \bar{10} & \bar{9} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{6} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{9} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{10} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{8} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(Hier fehlt noch $0 \mapsto 0$ in der Wertetabelle, aber LaTeX ist zu doof.)

## 4 Determinanten

**Wiederholung.** Die Determinante det einer Matrix ist linear in jeder Zeile und Spalte. Es gilt:

(i) $\det(I) = 1$

(ii) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(iii) $\det(A) = \det(A^T)$

(iv) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(K)$

Berechnung einer Determinante via Gauß-Algorithmus, Laplace-Entwicklung und Formel für $2 \times 2$-Matrizen:

(i) $\det(A \cdot A_{i,j}(\alpha)) = \det(A)$

(ii) $\det(A \cdot V_{i,j}) = -\det(A) \quad (i \neq j)$

(iii) $\det(A \cdot diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \prod_i \alpha_i \cdot \det(A)$

(iv) Laplace-Entwicklung nach der $i$-ten Zeile bzw. $j$-ten Spalte:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot A_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot A_{i,j}\end{aligned}$$

($A_{i,j}$ bezeichnet die Matrix, die man durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte erhält)

(v) $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie $\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ a & a & b \end{pmatrix})$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

*Lösung.*

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ a & a & b \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & c \\ a & 0 & b \end{pmatrix}) = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}) = b - 2a$$

**Satz** (Leibniz-Formel)**.** Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

**Beispiel.** Mit der zweiten Variante:

$$\begin{aligned}&\det(\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&c\\a&a&b\end{pmatrix})\\
&= 1\cdot 3\cdot b && \text{id}\\
&- 2\cdot 1\cdot b && \begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\\
&- a\cdot 3\cdot 2 && \begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\\
&- 1\cdot a\cdot c && \begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\\
&+ 2\cdot a\cdot 2 && \begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\\
&+ a\cdot 1\cdot c && \begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}\\
&= 3b-2b-6a-ac+4a+ac\\
&= b-2a\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.** Zeigen Sie $det(A) = det(B)$ für $A = \begin{pmatrix}a^3&a^2&a&1\\b^3&b^2&b&1\\c^3&c^2&c&1\\d^3&d^2&d&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}a^2&a&1&bcd\\b^2&b&1&acd\\c^2&c&1&abd\\d^2&d&1&abc\end{pmatrix}$.

*Beweis.* Wiederum Leibnizformel, 2. Variante. Jeder Term von $det(A)$ hat die Form:

$$x^3\cdot y^2\cdot z\cdot 1 = x^2\cdot y\cdot 1\cdot (xyz)$$

wobei die rechte Seite gerade den Termen von $det(B)$ entspricht ($x$, $y$, $z$ paarweise verschieden).

**Update**: Es ist noch zu begründen, wieso das Signum auch passt. Am besten so wie in der Aufgabe vorher. $\square$

**Definition.** Sei $A \in K^{n\times n}$. Die durch

$$\alpha_{i,j} := (-1)^{i+j}\cdot\det(A_{j,i})$$

definierte Matrix $A^\# \in K^{n\times n}$ heißt die zu $A$ <u>adjunkte Matrix</u>.

**Satz.** Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $det(A) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&A\cdot A^\# = \det(A)\cdot I_n\\ \Rightarrow\quad &A^{-1} = \frac{A^\#}{\det(A)}\end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Berechnen Sie die adjunkte Matrix $A^{\#}$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Lösung.*

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1} &= (-1)^2 \cdot \det(A_{1,1}) = 0 \\
\alpha_{1,2} &= (-1)^3 \cdot \det(A_{2,1}) = -2 \\
\alpha_{1,3} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{3,1}) = 2 \\
\alpha_{2,1} &= (-1)^3 \cdot \det(A_{1,2}) = -1 \\
\alpha_{2,2} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{2,2}) = 1 \\
\alpha_{2,3} &= (-1)^5 \cdot \det(A_{3,2}) = -1 \\
\alpha_{3,1} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{1,3}) = 1 \\
\alpha_{3,2} &= (-1)^5 \cdot \det(A_{2,3}) = -1 \\
\alpha_{3,3} &= (-1)^6 \cdot \det(A_{3,3}) = -1
\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Und, wie der Satz voraussagt:

$$A \cdot A^{\#} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot I = det(A) \cdot I$$