

Zyklische UVR

1/

$$\dim(V) < \infty, \phi \in \text{End}(V), u \in V \setminus \{0\}$$

Betrachte $u, \phi(u), \dots$ - irgendwann l.a.!

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}: B := \{u, \phi(u), \dots, \phi^{d-1}(u)\} \text{ l.u., aber } B \cup \{\phi^d(u)\} \text{ l.a.}$$

$\Rightarrow U := \langle B \rangle$ ist der kleinste ϕ -invariante UVR der u enthält, heißt zyklischer UVR.

$$\exists a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K}: \sum_{i=0}^{d-1} a_i \phi^i(u) + \phi^d(u) = 0$$

$$\Rightarrow D_{BB}(\phi|_U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow$
 $\phi(u) \quad \phi^2(u) \quad \dots \quad \phi^d(u)$

Sag. Begleitmatrix zum Polynom $a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1} + \underline{\underline{X^d}}$.

Eigenwerte

Definition: $x \in V$ heißt Eigenvektor : $\Leftrightarrow$

$$x \neq 0 \text{ und } \exists \lambda \in K: \phi(x) = \lambda \cdot x$$

$\Leftrightarrow \langle x \rangle$ ϕ -invariant und eindimensional

λ : Eigenwert

$\text{Spec}(\phi)$: Menge aller Eigenwerte, sog. Spektrum

Aufgabe 1: Sei $\phi \in \text{End}(V)$ mit $\pi^2 = \pi$.

Zeige: ϕ kann nur die EWe 0 und 1 besitzen.

Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda x = \phi(x) &= \phi(\phi(x)) = \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x) \\ &= \lambda^2 x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}. \quad \square$$

Aufgabe 2: Sei $\phi \in \text{End}(V)$ invertierbar.

Zeige: Ist 1 EW von $\phi \Rightarrow 2$ ist EW von $\phi + \phi^{-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \phi(x) = x &\Rightarrow x = \phi^{-1}(x) \\ \Rightarrow 2x &= \phi(x) + \phi^{-1}(x) = (\phi + \phi^{-1})(x). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: $\phi(x) = \lambda \cdot x$

$$\Leftrightarrow \phi(x) - \lambda \cdot \text{id}_V(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker(\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)}$$

$=: \text{Eig}(\phi, \lambda)$: Eigenraum (auch def. falls λ kein EW, dann $\{0\}$)

$\Rightarrow$ ① EV zu geg. EW berechnen ist einfach

(Gauß auf entspr. Matrix)

② λ ist EW von $\phi \Leftrightarrow \text{Rang}(\phi - \lambda \cdot \text{id}) < n = \dim(V)$

Beispiel: $D := \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\text{Spec}(D) := \text{Spec}(\phi_D) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

$\uparrow$
Matrix

Bemerkung: $\sum_i \text{Eig}(\phi, \lambda_i) = \bigoplus_i \text{Eig}(\phi, \lambda_i)$

$$\Rightarrow |\text{Spec}(\phi)| \leq \dim(V)$$

Idee: $\lambda \in W$ von ϕ , f Polynom

$$\Rightarrow f(\lambda) \in W \text{ von } f(\phi)$$

Suche Polynom mit $f(\phi) = 0$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in \text{Spec}(\phi): f(\lambda) = 0$$

↳

Definition: $f \in K[X]$ mit $f(\phi) = 0$ heißt annullierendes Polynom von ϕ .

$I(\phi) := \{ f \in K[X] \mid f(\phi) = 0 \}$ heißt Verschwindungsideal.

Satz: Es gibt immer ein genau ein Polynom in $I(\phi)$ von kleinstmöglichem Grad ≥ 0 mit Leitkoeffizient 1, das sog. Minimalpolynom $MP_\phi(X)$; und

$$\forall f \in I(\phi): MP_\phi(X) \mid f$$

Beispiel: (1.) $\text{Spec}(\overset{D:=}{\text{diag}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \{ \beta_1, \dots, \beta_n \}$ 

$$\Rightarrow MP_D(X) = \prod_{i=1}^n (X - \beta_i)$$

$$\text{z.B. } \text{diag}(1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow MP_D(X) = (X-1)(X-2),$$

$$\text{"denn"} \quad MP_D(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix} = 0.$$

$$(2.) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 + I_2 = 0 \Rightarrow MP_A(X) = X^2 + 1.$$

Satz:

$$\text{Spec}(\phi) = \{ \lambda \in K \mid \text{MP}_\phi(\lambda) = 0 \}$$

Definition: ϕ heißt diagonalisierbar

$\Leftrightarrow \exists$ Basis von V aus EGen von ϕ

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} \text{Eig}(\phi, \lambda) = V$$

$$\Leftrightarrow \dim V = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} \dim \text{Eig}(\phi, \lambda)$$

$\dim(V) = n$

$\Leftrightarrow$ es ex. eine Abb. matrix von ϕ in Diagonalgestalt

$$\Leftrightarrow \text{MP}_\phi(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$$

($\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarw. verschieden)

(vgl. oben!)

Aufgabe 3: Berechne die EWe und ERe der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_3$, und gib jeweils das Minimalpolynom an.

Lösung:

$$(1.) \quad \mathbb{C}: \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 1-\lambda \\ 0 & -1 & (1-\lambda)(\lambda-2)+1 \end{pmatrix}$$

Wann Rang < 3 ? Wenn D Rang < 2 hat!

$$\Leftrightarrow \det(D) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)((1-\lambda)(\lambda-2)+1) + (1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(1-\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{EWe } \underline{\lambda_1=1, \lambda_2=2.}$$

$$\underline{\lambda_1=1}: \text{Kern}(A-I_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenraum } \text{Eig}(A, 1) = \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\underline{\lambda_2=2}: \text{Kern}(A-2I_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, 2) = \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Wissen: λ_1, λ_2 sind NST von $MP_A(X)$, also
 $(X-1)(X-2) \mid MP_A(X)$

$$\text{Aber } (A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 !$$

$$\text{Aber } (A - I_3)^2 (A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\Rightarrow MP_A(X) = \underline{\underline{(X-1)^2(X-2)}}.$$

$\mathbb{F}_3$: Genauso! Nirgends etwas sinnvoll „kurzbares“...

$$(2) \underline{\underline{C}}: \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4+\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 12 & -8-\lambda \\ 0 & \underbrace{(1+\lambda)(3+\lambda)+1}_{=: D} & \underbrace{-(1+\lambda)(3+\lambda)}_{-1} \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = (-12)((1+\lambda)(3+\lambda)+1) + (8+\lambda)((1+\lambda)(3+\lambda)+1) \\ = (\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda+4)$$

$$\underline{\lambda_1=4} \quad \hookrightarrow \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-4} \\ \Rightarrow \underline{\lambda_2 = -2}$$

$$\underline{\lambda_1=4}: \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 36 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(B, 4) = \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$\underline{\lambda_2=-2}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(B, -2) = \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

wie oben: $(X-4)(X+2) \mid \text{MP}_B(X)$.

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\text{Aber } (B-4E_3)(B+2E_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{MP}_B(X) = \underline{(X-4)(X+2)^2}$$

$\mathbb{F}_3$: $[4] = [1] = [-2] \Rightarrow$ nur ein EW $\in B$, mit

$$\text{Eig}(B, [1]) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Und wegen $[6] = [0] \neq [-6]$: $(X-4)(X+2) = \cancel{(X+2)^2}$

$$\underline{(X-1)^2} = \text{MP}_B(X) \quad [\text{denn } X-1 \text{ ist sicher nicht}]$$

(3) usw...

Aufgabe 4: Schreibe die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

in der Form $B \cdot \text{diag}(\lambda, \mu) \cdot B^{-1}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $B \in GL_2(\mathbb{R})$).

Lösung: Idee: det und Spur sind Ähnlichkeitsinvariant

$$\Rightarrow \text{Spur}(\text{diag}(\lambda, \mu)) = \lambda + \mu = \text{Spur}(A) = 5.$$

$$\det(\text{diag}(\lambda, \mu)) = \lambda \mu = \det(A) = \frac{1}{9} 54 = 6.$$

$$\Rightarrow \text{"NLGS"}: \left. \begin{array}{l} \lambda + \mu = 5 \\ \lambda \cdot \mu = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 2, \mu = 3 \quad (\text{oder andersrum})$$

Idee: Bezüglich einer Basis von EGen hat die Abb.matrix Diagonalgestalt! $\Rightarrow$ EGen bestimmen:

$$\underline{\lambda = 2}: \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\lambda = 3}: \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Und vergleiche ~~mit~~:

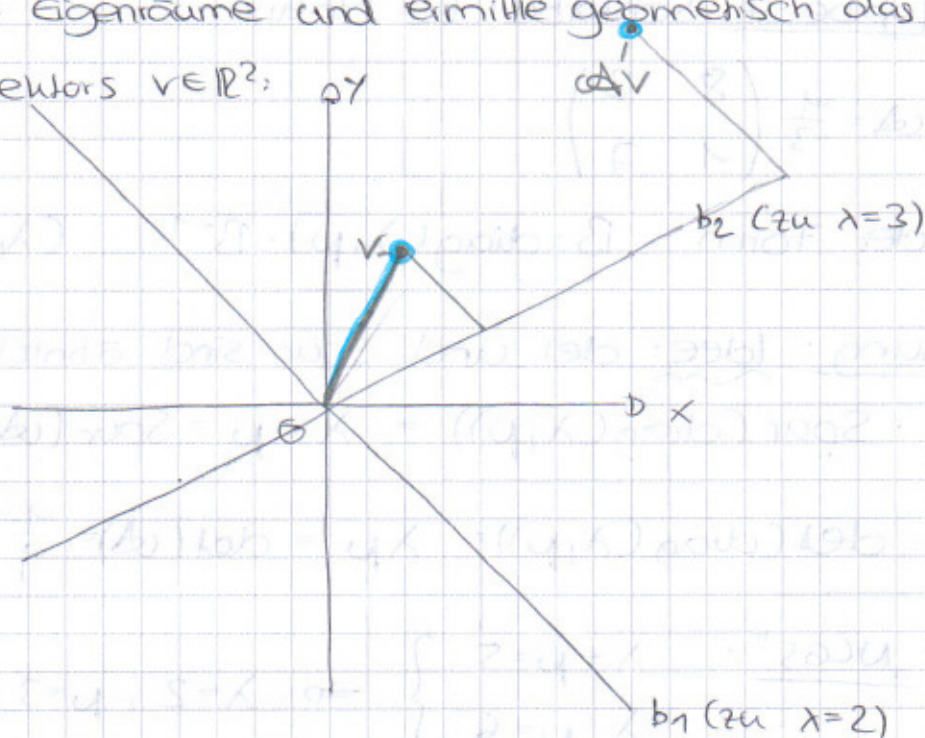
$$D_{SS}(\phi) = D_{SB}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot D_{BB}(\phi) \cdot D_{BS}(\text{id}_{\mathbb{R}^2})$$

$$A = B \cdot \text{diag}(\lambda, \mu) \cdot B^{-1}$$

$$\Rightarrow B = D_{SB}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

($\rightarrow$ Probe!)

Zeichne die Eigenräume und ermittle geometrisch das Bild eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$:



Probe: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$

Aufgabe 5: $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ habe die EWe $-1, 5, 19, 42$.

Ist ϕ diagonalisierbar? Wie lautet das Minimalpolynom?

Lösung: Die Summe

$$\text{Eig}(\phi, -1) \oplus \text{Eig}(\phi, 5) \oplus \text{Eig}(\phi, 19) \oplus \text{Eig}(\phi, 42)$$

ist direkt

$$\Rightarrow \dim(\text{Eig}(\phi, -1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\phi, 42))$$

$$\leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

$$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 \text{Eig}(\phi, \lambda_i) = \mathbb{R}^4$$

$\Rightarrow$ diagonalisierbar. ~~Basis~~ $\emptyset$

Minimalpolynom: $(x+1)(x-5)(x-19)(x-42)$.

Aufgabe 7: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne die EWe von A . Was weißt du über das MP? Finde das MP durch Probieren.

Lösung: $\text{Rang}(A - \lambda I_5) < 5$

$$\Leftrightarrow \text{Rang} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 2 \quad \text{oder} \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} < 2$$

$$\text{oder} \quad \text{Rang}(3-\lambda) < 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Wir wissen: $(X-1)(X-2)(X-3) \mid \text{MP}_A(X)$

$$(A-1)(A-2)(A-3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aber $(X-1)^2(X-2)^2(X-3)$ tut es!

Vgl. Form der Matrix!!!