

Abbildungsmatrizen

Sei $B = \{b_1, \dots, b_q\}$, $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ Basen von V bzw. W ,

$\phi: V \rightarrow W$ linear.

Dann können wir $\phi(b_j)$ darstellen:

$$\phi(b_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \cdot c_i$$

Für beliebige $x = \sum_{j=1}^q x_j b_j$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi\left(\sum_{j=1}^q x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^q x_j \phi(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p a_{ij} x_j c_i = \sum_{i=1}^p \underbrace{\left(\sum_{j=1}^q a_{ij} \cdot x_j\right)}_{=: y_i} c_i \end{aligned}$$

Es
~~Dann~~ gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{p \times q}$$

$\uparrow$
 Koord.
bzgl. C
von $\phi(x)$

$\uparrow$
 Koord.
bzgl. B
von x

Definition: Die Matrix $D_{CB}(\phi) := A$ heißt Abbildungsmatrix von ϕ bzgl. der Basen B und C .

Merksatz:

$$D_C(\phi(x)) = D_{CB}(\phi) \cdot D_B(x)$$

Aufgabe 4: Gegeben

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(b_1) = c_1$, $\Phi(b_2) = c_2$.

(i) Bestimme Abb. matrix bzgl. den Basen $\{b_1, b_2\}$ und $\{c_1, c_2, c_3\}$.

(ii) Bestimme " bzgl. den jeweiligen Standardbasen.

Lösung: ~~Bestimme matrix~~

(i)

$$\Phi(b_1) = \underline{1} \cdot c_1 + \underline{0} \cdot c_2 + \underline{0} \cdot c_3 \quad \leftarrow a_{i1} \quad (1. \text{ Spalte})$$

$$\Phi(b_2) = \underline{0} \cdot c_1 + \underline{1} \cdot c_2 + \underline{0} \cdot c_3 \quad \leftarrow a_{i2} \quad (2. \text{ Spalte})$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

klar: Denn $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{b_1, b_2\}$! (usw.)

(ii) Später!

Gegeben: Basen $B, \tilde{B}$ von V , $\phi: V \rightarrow W$ linear,
 $C, \tilde{C}$ von W , $D_{CB}(\phi)$

Gesucht: $D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\phi)$

Idee:

$$\tilde{C} \xleftarrow[\text{T}]{\text{id}_W} C \xleftarrow[\text{A}]{\phi} B \xleftarrow[\text{S}]{\text{id}_V} \tilde{B}$$

In der Tat gilt:

$$D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\phi) = D_{\tilde{C}C}(\text{id}_W) \cdot D_{CB}(\phi) \cdot D_{B\tilde{B}}(\text{id}_V)$$

zu Aufgabe 1: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \tilde{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T: $\text{id}_W(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \underline{\text{1. Spalte}}$

$$c_2 = \dots$$

$$c_3 = \dots$$

$$\Rightarrow T = (c_1 \mid c_2 \mid c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

S: $\text{id}_V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{2,1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{LGS: } \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \underbrace{\hspace{1cm}}_S$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Aha: $\boxed{D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\text{id}_V) = D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\text{id}_V)^{-1}}$

Abb. matrix $\underline{D_{\tilde{C}\tilde{B}}} = T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Spezialfall $\Phi: V \rightarrow V$, meist sinnvoll/interessant: $D_{BB}(\Phi)$

Basiswechselformel:

$$D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\Phi) = D_{\tilde{B}B}(\text{id}_V) \cdot D_{BB}(\Phi) \cdot D_{B\tilde{B}}(\text{id}_V)$$

Beweis des „Aha“:

$$\Phi = \text{id}_V \Rightarrow D_{BB}(\Phi) = D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\Phi) = \text{id}_n \quad (n = \dim(V))$$

$$\Rightarrow \text{id}_n = D_{\tilde{B}B}(\text{id}_V) \cdot D_{B\tilde{B}}(\text{id}_V)$$

$$\Rightarrow D_{\tilde{B}B}(\text{id}_V) = D_{B\tilde{B}}(\text{id}_V)^{-1}$$

$\Rightarrow$ es genügt über eine Richtung nachzudenken (die einfacher, Rest liefert Gauß! (vgl. auch oben))

Φ -Invariante UVR

Sei $U \subseteq V$, $\Phi: V \rightarrow V$ linear.

Definition: U heißt Φ -invariant $\Leftrightarrow$

$$\Phi(U) \subseteq U$$

~~$\{b_1, \dots, b_k\}$ Basis von U~~ ^{BW} ~~$\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V~~

Sei $\underbrace{\{b_1, \dots, b_k\}}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{b_{k+1}, \dots, b_n}_{\text{Basis von } V}$ Basis von V . Dann hat $D_{BB}(\Phi)$

die Form:

$$\begin{matrix} & \overbrace{}^k & & \\ k \left\{ \begin{pmatrix} \begin{matrix} M & * \\ 0 & * \end{matrix} \end{pmatrix} \right. & \end{matrix}$$

wobei $M = D_{BB}(\Phi|_U)$.

Aufgabe 2: Sei $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Abb.matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis)

(a) Berechne Basis B des $\ker(\phi)$, erweitere zu Basis $\tilde{B}$ von $\mathbb{R}^3$

(b) Berechne die Abb.matrix von ϕ bzgl. $\tilde{B}$.

(c) Finde Basis $\bar{B}$ eines ϕ -invarianten UVRV mit $\ker(\phi) \oplus V = \mathbb{R}^3$

(d) Berechne Abb.matrix von ϕ bzgl. $B \cup \bar{B}$.

Lösung: (a)

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\tilde{B} = B \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) D_{\tilde{B}}(\phi) = S^{-1} A S \quad \text{mit} \quad S = \Phi_{SD}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gauß} \leadsto S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{\tilde{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{array} \right)$$



(c) klar: $\dim(\bar{B}) = 1 \Rightarrow \bar{B} = \{b\}$

Suche b mit $\phi(b) = 12b$ (V soll ja ϕ -invariant sein)

$$\Leftrightarrow (A - 12 \cdot I_3)(b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \tilde{B}$$

$$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{12}$$

$$(d) D_{B \cup \bar{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Bedeutung?

Vielfache auch okay!!! $\rightarrow$

bzgl. Standardbasis.

A

Definition: $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen ähnlich : $\Leftrightarrow$ ist $\bar{A}R$

$$\exists S \in GL_n(\mathbb{K}) : \alpha = S^{-1} \beta S \Leftrightarrow S \alpha = \beta S$$

$$\underline{UB:} \quad \alpha \text{ ähnlich zu } \beta \Rightarrow \text{Spur}(\alpha) = \text{Spur}(\beta)$$

$$\alpha \text{ ähnlich zu } \alpha^T$$

Aufgabe 3: Welche der folgenden Matrizen sind ähnlich zueinander?

$$\text{~~last~~ } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: (i) $S^{-1} \alpha S = 0 \quad \forall S \Rightarrow \alpha$ ~~nicht~~ ähnlich zu keiner anderen!

(ii) $\text{Spur}(\alpha) = 1 \neq \text{Spur}(\beta) \quad (D, E) \Rightarrow C$ zu keiner anderen ähnlich!

(iii) Vermutung: β ähnlich zu D (vgl. A2!) Wie lautet S ?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow a=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow b=c$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b+d \end{pmatrix}$$

Probieren: $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{test}}$

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

(iv) Sind β bzw. D ähnlich zu E ?

Später!

Definition: Sei $\phi: V \rightarrow W$

$$\text{Rang}(\phi) := \dim(\text{Bild}(\phi))$$

Bemerkung: Sei A beliebige Abb. matrix von ϕ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\text{Rang}(\phi) &= \dim(\text{Bild}(\phi)) = \dim(V) - \dim(\ker(\phi)) \\ &= \dim(V) - \dim(L(A, 0))\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ deckt sich mit Rang der Matrix A !

Aufgabe 4: Der Rang ist eine Ähnlichkeitsinvariante.

Beweis: Seien $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, d.h. $\exists S \in GL_n(K)$:

$$SA = BS$$

Es genügt zu zeigen: (i) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(SA)$

$$(ii) \text{Rang}(B) = \text{Rang}(BS)$$

$$(ii) \text{Rang}(S) = n \Rightarrow \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle Se_1, \dots, Se_n \rangle = K^n$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(B)) = \dim \langle Be_1, \dots, Be_n \rangle$$

$$= \dim \langle BSe_1, \dots, BSe_n \rangle = \dim(\text{Bild}(BS))$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(B) = \text{Rang}(BS). \checkmark$$

(i) Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von $\text{Bild}(A) \Rightarrow \{Sb_1, \dots, Sb_n\}$ l.u.

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(A)) = \dim \langle Sb_1, \dots, Sb_n \rangle$$

$$= \dim \langle SAe_1, \dots, SAe_n \rangle = \dim(\text{Bild}(SA)).$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(SA). \checkmark$$

□