Der Faktorraum

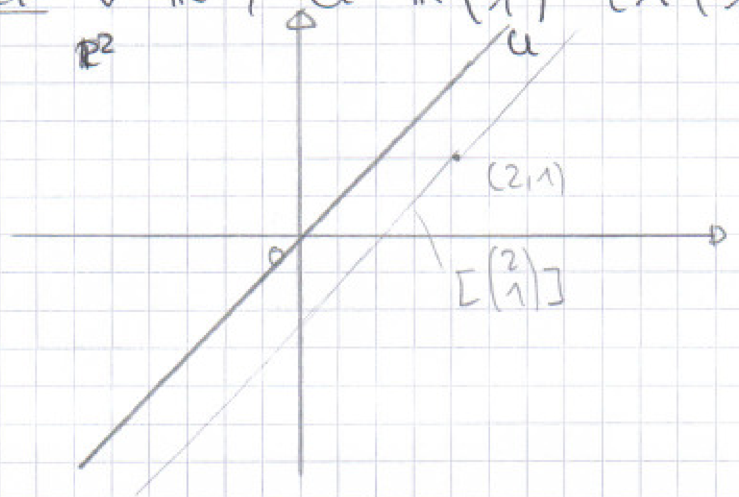
Äquivalenzrelation $\sim$ zu geg. UVR $U \subseteq V$:

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in U \qquad (x, y \in V)$$

„Nebenklassen" $[x] =: x + U$

Faktorraum $V/U := \{ x + U \mid x \in V \}$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$



$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + U = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} 2 + \lambda \\ 3 + \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

$\Rightarrow$ gibt unendlich viele Repräsentanten für jede Nebenklasse!

(eindeutig z.B. über Schnitt mit l.u. Geraden)

Bemerkung: V/U ist Vektorraum mit

$$[x] + [y] := [x + y]$$

$$\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$$

Aufgabe 4: V VR mit Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$,

$U_1 := \langle b_1, b_2 \rangle$, $U_2 := \langle b_2, b_4 \rangle$, $U_3 := \langle b_3 \rangle$.

(a) Welche Aussagen stimmen:

Weglassen!

~~1.~~ 1. $b_2 \in U_1 \cap U_2$

2. $2b_1 - b_3 \in U_1 \cup U_3$

3. $2b_1 - b_3 \in U_1 + U_3$

(b) Welche Summen sind direkt? Basis?

1. $U_1 + U_2$
2. $U_1 + U_3$
3. $U_2 + U_3$
4. $U_1 + U_2 + U_3$

(c) Welche Elemente von ~~E~~ V/U_1 sind gleich? Welche l.u.?

$x_1 := 3b_2 + 4b_3 + U_1$

$x_2 := b_1 - b_2 + b_3 + U_1$

$x_3 := b_1 + 4b_3 + U_1$

$x_4 := b_3 + b_4 + U_1$

(d) Basis von V/U_1?

Lösung: (a) 1. $b_2 \in U_1$ und $b_2 \in U_2 \Rightarrow b_2 \in U_1 \cap U_2$ ✓

2. $2b_1 - b_3 \notin U_1$ und $2b_1 - b_3 \notin U_3 \Rightarrow 2b_1 - b_3 \notin U_1 \cup U_3$ ↯

3. $2b_1 - b_3 = \langle b_1, b_3 \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = U_1 + U_3$ ✓

(b) 1. $\underbrace{b_2}_{\in U_1} - \underbrace{b_2}_{\in U_2} = 0$, $b_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ nicht direkt ↯

2. $\underbrace{U_1}_{\dim = 2} + \underbrace{U_3}_{\dim = 1} = \underbrace{\langle b_1, b_2, b_3 \rangle}_{\dim = 3}$ $\Rightarrow$ direkt ✓

3. analog ✓

4. nein ↯

(c) $x_1 = 3b_2 + 4b_3 + U_1$ $\quad \underline{\text{l.a.}} \quad$ $x_2 = b_1 - b_2 + b_3 + U_1$

$\quad = 4b_3 + U_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = b_3 + U_1$

$\quad \| \qquad\qquad \text{l.u.} \qquad\qquad \text{l.u.}$

$x_3 = b_1 + 4b_3 + U_1 \qquad\qquad x_4 = b_3 + b_4 + U_1$

$\quad = 4b_3 + U_1$

(d) $V/U_1 = \{ [v] \mid v \in V \} = \{ v + U \mid v \in V \}$

$= \{ \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_4 b_4 + U \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{k} \}$

$= \{ \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + U \mid \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{k} \}$

$= \langle b_3 + U_1, b_4 + U \rangle$

Allgemein: B_U Basis von U_1, erweitern ~~zu~~ zu Basis B von V. Dann gilt:

$$V = U_1 \oplus \langle \underbrace{B \setminus B_U}_{=:C} \rangle = U \oplus \langle C \rangle$$

$$\Rightarrow V/U = \langle \{ c + U \mid c \in C \} \rangle$$

Also: $\boxed{\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)}$

OPTIONAL

Aufgabe 2

$$a := \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix}5\\2\\1\\6\end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix}4\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

$U := \langle a, b \rangle$

(a) Erweitere $\{a,b\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$!

Bestimme Basis ~~des~~ von $\mathbb{R}^4/U$.

(b) Prüfe: $c+U = d+U$

$c+U = a+U$

$d+U = 0+U$

Lösung: (a)
$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&2&1&4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ erweitere mittels $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^4/U = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + U \right\rangle$$

$\Rightarrow \dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

(b) $c+U = d+U \Leftrightarrow c-d \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix} \in U$

$\Rightarrow$ löse LGS: $\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&2&-1\\1&1&-2\\2&4&2\end{array}\right)$, $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}0&0&3\end{array}\right)$ ↯ $\Rightarrow$ nein

$c+U = a+U \Leftrightarrow c+U = U \Leftrightarrow c \in U \quad \rightsquigarrow$ ja

$d+U = 0+U \Leftrightarrow d \in U \quad \rightsquigarrow$ nein (klar!!!)

Aufgabe 3

Sei $U \leq V$ und $x \in V$. Zeige:

$$[x]_\sim = [0]_\sim \text{ in } V/U \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x+U = U \Leftrightarrow x+U \leq V$$
$$\text{(i)} \qquad \text{(ii)} \qquad \text{(iii)} \qquad \text{(iv)}$$

Beweis:

(i)$\Leftrightarrow$(ii): $[x]_\sim = [0]_\sim$ in V/U

$\Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow x - 0 \in U \Leftrightarrow x \in U$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $x \in U$, U UVR $\Rightarrow$ abgeschl. bzgl $+$

$\Rightarrow x + u \in U \; \forall u \in U$

$\Rightarrow x + U \subseteq U$.

Sei $u \in U$. $x \in U \Rightarrow (-x+u) \in U \Rightarrow u = x + (-x+u) \in x+U$

$\Rightarrow U \subseteq x + U$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): klar, da U UVR.

(iv)$\Rightarrow$(ii): $x+U$ UVR $\Rightarrow 0 \in x+U \Rightarrow (-x) \in U \Rightarrow x \in U$.

$\square$

Homomorphiesatz

Definition/Satz: Sei $U \leq V$.

$$\pi_{U/V}: \begin{cases} V \to V/U \\ x \mapsto x+U \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad i: \begin{cases} U \to V \\ x \mapsto x \end{cases}$$

(kanonische Projektion) (Inklusion)

ist ein surjektiver bzw. injektiver Homomorphismus.

Satz: Sei $\Phi: V \to W$ ein Homomorphismus, und $U \leq \mathrm{Kern}(\Phi)$

(a) Dann existiert genau ein Homomorphismus $\tilde{\Phi}$ sodass das folg. Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{V/U}"'] & W \\ V/U \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] & \Phi(V) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(d.h. $\exists_1 \tilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}(V/U, \Phi(V)): \Phi = i \circ \tilde{\Phi} \circ \pi_{V/U}$.)

(b) $U = \mathrm{Kern}(\Phi) \Rightarrow \tilde{\Phi}$ ist Isomorphismus, d.h.

$$\boxed{V/\mathrm{Kern}(\Phi) \cong \Phi(V)}$$

Idee: Alle x mit gleichem y stecken in der selbe Nebenklasse!

$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = y \Rightarrow \Phi(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Kern}(\Phi)$

$\Rightarrow x_1 + \mathrm{Kern}(\Phi) = x_2 + \mathrm{Kern}(\Phi) \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$

$\Rightarrow$ macht injektiv.

Surjektiv, da wir nur das Bild $\Phi(V)$ betrachten.

Bemerkung: $\mathrm{Bild}(\Phi) := \Phi(V)$

$\Rightarrow V/\mathrm{Kern}(\Phi) \cong \mathrm{Bild}(\Phi)$ und

$\dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \dim(\mathrm{Bild}(\Phi))$

Aufgabe 4

Sei $V := \mathbb{R}[X]$, $U := \{X \cdot p \mid p \in \mathbb{R}[X]\}$ und $U' = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid p(0) = 0\}$.

Zeige:

(a) $U \leq V$

(b) $U = U'$

(c) $V/U \cong \mathbb{R}$ (Homomorphiesatz!)

Beweis: (a) (i) $0 = X \cdot 0 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

(ii) Sei $X \cdot p, X \cdot q \in U \Rightarrow X \cdot p + X \cdot q = X \underbrace{(p+q)}_{\in \mathbb{R}[X]} \in U$

(iii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \cdot p \in U \Rightarrow \lambda(X \cdot p) = X(\lambda p) \in U$

UVR-Kriterium $\Rightarrow$ Beh. ✓

(b) „$\supseteq$": Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in U'$. $p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$\Rightarrow p = X\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} X^i\right) \Rightarrow p \in U$.

„$\subseteq$": Sei ~~p∈X·p~~ $X \cdot p \in U \Rightarrow (X \cdot p)(0) = 0 \cdot p(0) = 0 \Rightarrow X \cdot p \in U'$. ✓

(c) Betrachte Homomorphismus:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ p \mapsto p(0) \end{cases}$$

Es gilt: $\ker(\Phi) \ni p \Leftrightarrow \Phi(p) = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0 \Leftrightarrow p \in U' = U$

$\Rightarrow \ker(\Phi) = U$.

Und: $\Phi(\mathbb{R}[X]) \supseteq \Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}$.

Hom.satz: $\mathbb{R}[X] / \ker(\Phi) \cong \Phi(\mathbb{R}[X])$

$\Leftrightarrow V/U \cong \mathbb{R}$. ✓

$\square$

Lineare Fortsetzung

Satz: Seien V, W VR, $\mathcal{B}$ Basis von V, $f: \mathcal{B} \to W$

$\Rightarrow \exists_1 \Phi \in \mathrm{Hom}(V,W): \Phi|_{\mathcal{B}} = f$ („lineare Fortsetzung")

(also: $\mathrm{Abb}(\mathcal{B}, W) \cong \mathrm{Hom}(V,W)$)

Idee: Sei $x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda(b) \cdot b \in V$. Dann muss gelten:

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda(b) \cdot b\right) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda(b) \cdot \Phi(b)$$

$$= \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda(b) \cdot f(b)$$

$\Rightarrow$ eindeutig, und ist auch linear.

Aufgabe 5: Gegeben seien $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeige: Es gibt genau einen Hom. $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(x_i) = y_i$.
Berechne $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: (i) x_1, x_2 l.u. $\Rightarrow \{x_1, x_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ es existiert genau eine lin. Forts. $\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \mapsto \lambda y_1 + \mu y_2 \end{cases}$

(ii) Suchen λ, μ für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{*}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\tfrac{1}{5} x_1 - \tfrac{3}{5} x_2\right) = \tfrac{1}{5} y_1 - \tfrac{3}{5} y_2 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

$\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ analog.

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a \cdot \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + b \cdot \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{s.o.}}{=} \ldots$$

Aufgabe 6: Sei $\varphi: V \to W$ eine surjektive lineare Abb.

Zeige: es existiert eine ~~linear~~ injektive lineare Abb.

$\psi: W \to V$ mit $\varphi \circ \psi = id_W$.

Beweis: Sei C eine Basis von W. φ surjektiv $\Rightarrow$

$$\forall c \in C: \exists b_c \in V: \varphi(b_c) = c$$

~~Setze~~ Die $\{b_c \mid c \in C\}$ sind dann l.u. und können zu einer Basis B von V erweitert werden. Sei ψ die lineare Fortsetzung von

$$\hat{\psi}: \begin{cases} C \to B \\ c \mapsto b_c \end{cases}$$

Es gilt:

$$\varphi(\psi(c)) = \varphi(\hat{\psi}(c)) = \varphi(b_c) = c$$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_W$

~~Aufgabe~~:

~~[illegible]~~

Seien $x, y \in W$ und $\psi(x) = \psi(y)$. Dann gilt:

$$x - y = \varphi(\psi(x-y)) = \varphi(\psi(x) - \psi(y)) = \varphi(0) = 0$$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow \psi$ injektiv. $\square$

Dualraum

~~f~~

Definition: Sei V ~~ein~~ $\mathbb{K}$-Vektorraum.

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

heißt Dualraum von V, $\lambda \in V^*$ heißt Linearform.

Bemerkung: $\mathcal{B}$ Basis von V, ~~#B~~ $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$.

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Abb}(\mathcal{B}, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow \dim(V^*) = n.$

Dualbasis $\mathcal{B}^* := \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ wobei b_i^* lineare Forts. ~~von~~ def. via

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

Es gilt nämlich:

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) \cdot b_i} \quad \Rightarrow \quad \lambda(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) \cdot \lambda(b_i)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(b_i) \cdot b_i^*$$

(vgl. $D_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ \vdots \\ b_n^*(v) \end{pmatrix}$)

(klar: $\dim(V) < \infty \Rightarrow V \cong V^*$)

Beispiel: $V = \mathbb{K}^n$. Wissen: ~~K~~

$$V^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{1 \times n}$$

Also falls $\{b_1, \dots, b_n\}$ ~~$\in \mathbb{K}^n$~~ Basis des $\mathbb{K}^n$, dann gibt es $\{z_1, \dots, z_n\} \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ die der Dualbasis entsprechen via $b_i^*(x) = z_i x$. Aber muss gelten $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \quad z_i b_j = \delta_{ij}$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline z_n \end{pmatrix}}_{\rightarrow \text{ invertieren!}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \Big| & \cdots & \Big| & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Definition: Sei $\phi: V \to W$ linear, so ist

$$\phi^*: \begin{cases} W^* \to V^* \\ \lambda \mapsto \lambda \circ \phi \end{cases} \quad \text{(duale Abb. zu } \phi\text{)}$$

linear, und es gilt:

ϕ injektiv $\Rightarrow$ ϕ^* surjektiv

ϕ surjektiv $\Rightarrow$ ϕ^* injektiv

Aufgabe 7: $U \leq V$. Zeige

$$U^* \cong V^* / \{\lambda \in V^* \mid \lambda|_U = 0\}$$

Beweis:

$$\phi: \begin{cases} V^* \to U^* \\ \lambda \mapsto \lambda|_U \end{cases} \quad \text{ist linear.}$$

$\lambda \in \mathrm{Kern}(\phi) \Leftrightarrow \phi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda|_U = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(\phi) = \{\lambda \in V^* \mid \lambda|_U = 0\}$.

$\phi(V^*) = U^*$

$\Rightarrow V^* / \mathrm{Kern}(\phi) \cong U^*$. $\square$

$\Leftrightarrow V^* / \{\lambda \in V^* \mid \lambda|_U = 0\} \cong U^*$.