Englische Begriffe

Körper: field

Vektorraum: linear space

Abbildung: map

Basen und l.u.

Definition: Sei $M \subseteq V$. Dann heißt

$$\lambda_1 \cdot m_1 + \ldots + \lambda_n \cdot m_n \qquad (n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ m_i \in M)$$

eine <u>Linearkombination von M</u>.

Alternativ: Sei $M \subseteq V$. Dann heißt

$$\sum_{m \in M} \lambda(m) \cdot m \qquad (\lambda \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})_0)$$

eine <u>Linearkombination von M</u>.

Aufgabe 1: Schreibe $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \Big($

Lösung: $\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \iff \lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ löst das

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2), + \\ (-1), + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}.$$

Definition: $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ Nullvektor lässt sich nur trivial als Lk von M schreiben

$\Leftrightarrow \left(\sum_{m \in M} \lambda(m) \cdot m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \qquad (\lambda \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})_0) \right)$

Falls $M = \{m_1, .., m_q\} \subseteq \mathbb{K}^p$: M linear unabhängig

$\Leftrightarrow \underbrace{(m_1 | .. | m_q)}_{=: \mathcal{A}} x = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$

$\Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{A}}$ injektiv

$\Leftrightarrow \mathrm{Rang}(m_1 | .. | m_q) = \mathrm{Rang}(\mathcal{A}) = q$.

Sonst: linear abhängig.

Aufgabe 2: Seien V, W VR, $\Phi: V \to W$ lineare Abb.,
$\{w_1, .., w_n\} \subseteq W$ linear unabhängig, $\{v_1, .., v_n\} \subseteq V$ mit $\Phi(v_i) = w$
Zeige: $\{v_1, .., v_n\}$ linear unabhängig.

Beweis: $\{v_1, .., v_n\}$ l.a. $\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K}$: $0 = \lambda_1 \cdot v_1 + .. + \lambda_n \cdot v_n$

$= \Phi(0) = \lambda_1 \cdot \Phi(v_1) + ... + \lambda_n \cdot \Phi(v_n) = \lambda_1 w_1 + .. + \lambda_n \cdot w_n$

↯ zu l.u. der w_i. □

Aufgabe 3: Sind $\{X-1, X^2-X+2, X^2-1, X^4-X^2-1\} \subseteq \mathbb{R}[$
l.u.?

Lösung: $\lambda_1 \cdot (X-1) + \lambda_2 (X^2-X+2) + \lambda_3 (X^2-1) + \lambda_4 (X^4-X^2-1) =$
$(\lambda_1, .., \lambda_4 \in \mathbb{R})$. $\boxed{1, X, X^2, .. \text{ l.u.}}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \qquad\qquad &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & - \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ja. ✓

Aufgabe 4: $x_1, \dots, x_n \in V$. Beweise oder widerlege:

(1.) $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ l.a. $\Rightarrow$ jeder Vektor aus A lässt sich als Lk d
übrigen darstellen.

(2.) $\exists x \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Lk von $x_1, \dots, x_n$
$\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ l.u.

(3.) $x_1, \dots, x_n$ l.u., $a \in V \Rightarrow x_1 + a, \dots, x_n + a$ l.u.

Lösung: (1.) Gegenbeispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x_2 \text{ lässt sich nicht als Lk von } x_1 \text{ darstellen} \\ \{x_1, x_2\} \text{ l.a.} \end{array}\right\} \Rightarrow \lightning$

(2.) Annahme: $x_1, \dots, x_n$ l.a. $\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K}: \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

~~$\Rightarrow x =$~~

$\left.\begin{array}{l} \text{Aber: } x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \text{ eindeutig} \\ x = x + 0 = \underbrace{(\mu_1 + \lambda_1)}x_1 + \dots + \underbrace{(\mu_n + \lambda_n)} x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lightning$

mind. eins $\neq \mu_i$

$\square$

(3.) ~~$x_1 + x_2, \dots$~~ Wähle $a = -x_1 \in V$

$\Rightarrow \{0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$ l.a. $\lightning$

Wichtig: $A \subseteq V$, $0 \in A \Rightarrow A$ l.a.

Letztes Mal: Erzeugendensystem. $\mathbb{R}^2 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{„minimaler"}} \rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, ($

Gibt es minimalstes?

Definition: $\mathcal{B} \subseteq V$ heißt Basis $:\Longleftrightarrow$

„jeder Vektor in V lässt sich auf genau eine Art als Lk von $\mathcal{B}$ schreiben" $\Longleftrightarrow$

$$\forall v \in V: \ \exists_1 \lambda \in \mathrm{Abb}(\mathcal{B}, \mathbb{K})_0 : \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda(b) \cdot b = v$$

Beispiel: ~~$\mathbb{R}^2$~~ (1.) $\{x, y\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow \forall v \in V: \ \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot y = v$ hat genau eine Lösung

$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \mid y \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = v$ hat genau eine Lösung

„höchstens eine: Rang $= q$
mindestens eine: Rang $= p$"

$\Longleftrightarrow \mathrm{Rang}(\mathcal{A}) = 2$

$\Longleftrightarrow x, y \neq 0$ und $x \notin \mathbb{R}y \Longleftrightarrow x, y$ l.u.

(2.) $\{b_1, \ldots, b_q\} \subseteq \mathbb{K}^p$ Basis von $\mathbb{K}^p$

$\Longleftrightarrow \forall v \in V: \ \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_q b_q = v$ hat genau eine Lösung

$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \mid \ldots \mid b_q \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_q\end{pmatrix} = v$ hat genau eine Lösung

$\Longleftrightarrow q = \mathrm{Rang}(\mathcal{A}) = p \Longleftrightarrow p = q$ und $\mathcal{A}$ invertierbar

~~$\Longleftrightarrow$ „voller Rang" Zahl~~

(3.) Unendliche Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^p$ kann keine Basis sein:

Nimm $b_1, \ldots, b_{p+1} \in \mathcal{B}$:

$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \mid \ldots \mid b_{p+1} \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_{p+1}\end{pmatrix} = 0$ hat mehr als eine Lösung,
denn $\mathrm{Rang}(\mathcal{A}) \leq p < p+1$

$\Rightarrow$ 0-Vektor lässt sich auf 2 Arten ausdrücken. $\lightning$

~~Jetzt Vektoren 2 des~~

Also:

1. p+1 Vektoren des $\mathbb{K}^p$ sind l.a.

2. jede Basis des $\mathbb{K}^p$ ~~[illegible]~~ enthält genau p Vektoren.

Bemerkung: Sei B Basis von V.

$\Rightarrow \mathrm{Abb}(B, \mathbb{K})_0 \cong V$.

Es gibt also eine Abbildung $D_B : V \to \mathrm{Abb}(B, \mathbb{K})_0$ („Koordinatenabb."), $D_B(v)$ heißt Koordinatenvektor. Wieso?

Sei $B = \{b_1, .., b_n\}$ Basis von V. können jeden Vektor $v \in V$ eind darstellen als

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n$$

~~Für eine feste Basis B~~

B fest $\Rightarrow$ brauchen uns nur $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ zu merken

Koordinatenvektor.

Also $V \cong \mathbb{K}^n$. Achtung: Reihenfolge der b_i wichtig (geordne Basis).

~~[illegible]~~

Satz: $\mathcal{B}$ Basis von V

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ maximal unter den l.u. Teilmengen von V

$(\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}$ l.a.)

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ minimal unter den Erzeugendensystemen von V

$(\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \Rightarrow \langle \mathcal{D} \rangle \neq V)$

Also: $\boxed{\mathcal{B} \text{ Basis} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ l.u. } \cancel{\text{maxi}} \text{ Erzeugendensystem}}$

Satz: V besitzt endliches Erzeugendensystem. Dann gilt:

(a) V besitzt eine Basis

(b) jedes endliche Erzeugendensystem von V enthält eine Basis

(c) jede l.u. Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis ergänzen

(d) zwei Basen besitzen gleich viele Elemente

(für $\mathbb{K}^n$ gezeigt, aber $V \cong \mathbb{K}^n$ wegen endlicher Basis)

$\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{K}}(V) := |\mathcal{B}|$ ist sinnvoll, heißt Dimension von V.

klar: $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$, $U \leq V \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(U) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$

gleich $\Leftrightarrow$ $U = V$

Beispiel: $\mathbb{R}^2$: $U \leq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(U) \in \{0,1,2\}$

1. $\dim(U) = 0$: $U = \{0\}$
2. $\dim(U) = 1$: $U = \langle b \rangle$ $(b \neq 0)$
3. $\dim(U) = 2$: $U = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 5: (a)

$$U := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \leq \mathbb{R}^4 \text{ mit } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~und~~ Finde Basis ~~eines~~ von U und ergänze zu Basis des $\mathbb{R}$

(b) Finde Homomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\ker(\varphi) = U$.

Lösung: (a) Idee: Gauß erzeugt Linearkombinationen ~~[illegible]~~, Erzeugnis bleibt gleich:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Es gilt:}$$

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

offenbar Basis!

$\Rightarrow \dim(U) = 3$

Offenbar erhalten wir mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$!

(b) Viele Möglichkeiten: über D_B, (-1)-Trick „von Hinten", oder Hinsehen:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) := (x_3 - x_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Summe von UVRen

Erinnerung: $U + W := \langle U \cup W \rangle$

$$\sum_{i=1}^{n} U_i := \langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle$$

Definition: $U + W$ heißt direkt $:\Longleftrightarrow$

$u + w = 0$ (~~für~~ $u \in U, w \in W$) $\Rightarrow$ $u = w = 0$

Schreibweise $U \oplus W$.

$\sum_{i=1}^{n} U_i$ heißt direkt $:\Longleftrightarrow$

$u_1 + \ldots + u_n = 0$ $(u_i \in U_i)$ $\Rightarrow$ $u_1 = \ldots = u_n = 0$

Schreibweise $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$

Beispiel: (1.) $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V.

$$V = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} \{b_i\} \rangle = \underbrace{\langle b_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle b_i \rangle}_{\text{da } \mathcal{B} \text{ Basis}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle b_i \rangle.$$

(2.) $\sum_{i=1}^{n} U_i$ direkt $\Leftrightarrow$ $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i)$.

Satz (Dimensionsformel):

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Also: $U + W$ direkt $\Leftrightarrow$ $\dim(U \cap W) = 0$.

Def: Sei $U \leq V$. $W \leq V$ heißt zu U komplementärer UVR von V $:\Longleftrightarrow$

$U \oplus W = V$.

(geht immer: Basiserweiterung!)

Aufgabe 6: Gegeben seien

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{F}_3^5$ über $\mathbb{F}_3$!!! $U_1 := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $U_2 := \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$.

Finde Basen und Dimension von $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$.

Lösung: $U_1, U_2, U_1 + U_2$ entweder wie in der letzten Aufgabe (erzeugende Vektoren in Zeilen schreiben), oder, geschickter:

$U_1 + U_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Idee: $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ ~~...~~ Basis von $\langle x_1, \dots, x_6 \rangle$
$\Leftrightarrow$ $Cx_{i_1}, \dots, Cx_{i_k}$ Basis von $\langle Cx_1, \dots, Cx_k \rangle$

(A1, (c))

Außerdem: x_j j-te Spalte von A
$\Leftrightarrow$ Cx_j j-te Spalte von CA

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{Cx_1, Cx_2, Cx_3, Cx_6\}$ Basis von ~~erzeugen~~ $\langle Cx_1, \dots, Cx_6 \rangle$

$\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ Basis von $\langle x_1, \dots, x_6 \rangle = U_1 + U_2$

$\Rightarrow$ $\dim(U_1 + U_2) = 4.$

U_1: Erste drei Spalten sind schon in Treppenform, analog:

$\{x_1, x_2, x_3\}$ Basis von U_1, $\dim U_1 = 3$.

U_2: Letzten drei nicht in TF!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{x_4, x_5, x_6\}$ Basis von U_2, $\dim U_2 = 3$.

$U_1 \cap U_2$: $v \in U_1 \cap U_2$: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_6$:

$$v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 + \lambda_6 x_6$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \bar{\lambda}_4 x_4 + \bar{\lambda}_5 x_5 + \bar{\lambda}_6 x_8 = 0$$

Haben wir schon gelöst! (−1)-Trick liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= x_1 + x_2 \\ x_5 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Also: $x_4, x_5 \in U_1 \cap U_2$, x_4, x_5 l.u.

$$\left.\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U_2) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \\ &= 3 + 3 - 4 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{x_4, x_5\} \text{ Basis von } U_1 \cap U_2.$$