I. Vektorräume und UVR

<u>Definition</u>: Eine kommutative Gruppe $(V,+)$ heißt <u>$\mathbb{K}$-Vektorraum</u> $:\Leftrightarrow \exists \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (<u>skalare Mult.</u>) mit:

(i) $\forall v \in V: \quad 1 \cdot v = v$

(ii) $\forall a,b \in \mathbb{K},\ v \in V: \quad a(bv) = (ab)v$

(iii) $\forall a,b \in \mathbb{K},\ v,w \in V: \quad (a+b)(v+w) = av + aw + bv + bw$

<u>Beispiele</u>: (1.) $\mathbb{K}$ Körper, $n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{K}^n$ ist $\mathbb{K}$-VR

mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

(2.) M Menge, V $\mathbb{K}$-VR $\Rightarrow \mathrm{Abb}(M,V)$ ist $\mathbb{K}$-VR mit

$f+g: m \mapsto f(m)+g(m)$,

$a \cdot f: m \mapsto a \cdot f(m)$

(3.) $\mathbb{K}$ Körper $\Rightarrow \mathbb{K}[X]$ ist $\mathbb{K}$-VR.

(4.) $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-VR, aber auch $\mathbb{Q}$-VR.

<u>Übungsblatt</u>: $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-VR, aber auch $\mathbb{R}$-VR oder $\mathbb{Q}$-VR.

Definition: $U \subseteq V$ heißt <u>UVR</u> von V $:\Leftrightarrow$
$(U, +, \cdot)$ ist VR

Schreibweise: $U \leq V$.

<u>Satz</u> (<u>UVR-Kriterium</u>): $U \subseteq V$ ist UVR von V $\Leftrightarrow$

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) $\forall u, v \in U: \quad u + v \in U$

(iii) $\forall a \in \mathbb{K}, v \in U: \quad a \cdot v \in U$

<u>Beispiel</u>: (1.) V und $\{0\}$ sind immer UVR von V.
Insbesondere $\underline{\underline{0}}$ in jedem UVR enthalten!

(2.) $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$: $\quad \mathcal{L}(\mathcal{A}, 0) \leq \mathbb{R}^q$ (letztes Blatt)

(3.) $\mathbb{R}^2$: $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$, $\{v \cdot \mathbb{R} \mid (v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\}$
(<u>unendlich viele</u>!)
$\Rightarrow$ vgl. $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4: Welche der folgenden Mengen sind UVRe des $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(t^2, -t^2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\}$

$C = \{(x+1, x-2, x+3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$D = \{(t, t+s^3, t-s^3) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

$E = \{(0,0,0)\}$

$F = \{(x, x+y, 2x-y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

Lösung:

A: nein, denn z.B. $(-1)\cdot(1, -1^2, 0) = (-1, 1, 0) \notin A$

B: nein, denn $(0,0,0) \notin B$

C: nein, denn $(0,0,0) \notin C$

D: ja: (i) $(0,0,0) \in D \Rightarrow D \neq \emptyset$

(ii) $(t, t+s^3, t-s^3) + (u, u+v^3, u-v^3)$

$= (\underbrace{t+u}_{=:w}, t+u + \underbrace{s^3+v^3}_{=: x^3}, t+u - (s^3+v^3))$

$= (w, w+x^3, w-x^3) \in D$

(iii) $a\cdot(t, t+s^3, t-s^3)$

$= (a\cdot t, \underbrace{a\cdot t}_{=t'} + \underbrace{a\cdot s^3}_{=s'^3}, a\cdot t - a\cdot s^3)$

$= (t', t'+s'^3, t'-s'^3)$. $\square$

E: ja

F: nein, denn z.B. $\frac{1}{2}\cdot(1,1,2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \notin F$.

Aufgabe 2: Welche der folgenden Mengen sind UVR von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$A = \{ f \mid f(-1) = 0 \}$

$B = \{ f \mid f \text{ injektiv} \}$

$C = \{ f \mid f \text{ nicht injektiv} \}$

$D = \{ f \mid \cancel{\forall x \in \mathbb{R}:} \ \exists a, b \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) \}$

Lösung:

A ja: (i) $f \equiv 0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

(ii) $\cancel{\forall \alpha \in \mathbb{R}:}$ $\forall f, g \in A: \quad (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow f + g \in A$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, f \in A: \quad (a \cdot f)(1) = a \cdot f(1) = a \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow a \cdot f \in A$

$\square$

B: nein, $f - f = 0 \notin B$ ↯

C: nein, $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

f, g nicht injektiv, aber $(f+g)(x) = x \Rightarrow f + g \notin B$

injektiv

D ja: (i) $f \equiv 0 \in D \quad (a = b = 0) \Rightarrow D \neq \emptyset$

(ii) $\forall f, g \in A, \quad f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x),$

$g(x) = c \sin(x) + d \cdot \cos(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow (f+g)(x) = (a+c) \cdot \sin(x) + (b+d) \cdot \cos(x) \in D$

(iii) $\forall f \in A, \quad f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x),$

$\forall d \in \mathbb{R}:$

$\Rightarrow (a f)(x) = (d \cdot a) \sin(x) + (d \cdot b) \cdot \cos(x) \in D.$

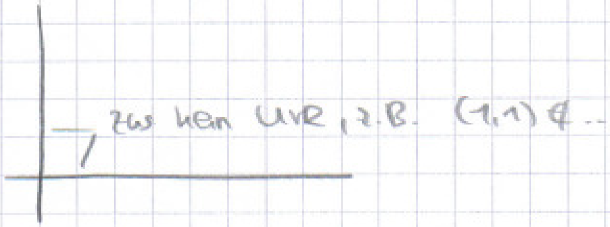
$\square$

Satz: I Menge, U_i UVR von V $\forall i \in I$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$ ist UVR von V

Gilt i.A. nicht für Vereinigung ($\Rightarrow$ ÜB).

$\mathbb{R}^2$:



~~Kleinster U~~

Definition: Sei $M \subseteq V$.

$$\langle M \rangle := \{ \underbrace{a_1 \cdot v_1 + .. + a_n \cdot v_n}_{\text{Linearkombination}} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, v_i \in M \}$$

heißt Erzeugnis oder lineare Hülle von M. M heißt Erzeugendensystem von $\langle M \rangle$. $\langle M \rangle$ ist UVR von V.

Seien A, B VRe.

$$A + B := \langle A \cup B \rangle$$

heißt Summe der VRe A und B.

Beispiel: $\mathbb{R}^2$: $\langle 0 \rangle = \{0\}$, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}$,

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2$.

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2$.

II. Homomorphismen

Definition: Seien V, W $\mathbb{K}$-VRe. $\Phi: V \to W$ mit

(i) $\forall u, v \in V$: $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

(ii) $\forall a \in \mathbb{K}, v \in V$: $\Phi(a \cdot v) = a \cdot \Phi(v)$

heißt $\mathbb{K}$-VR-Homomorphismus oder $\mathbb{K}$-lineare Abb.

Wie gehabt: $\mathrm{Hom}(V, W)$, $\mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Iso}(V, W)$, $\mathrm{Aut}(V)$.

$\ker(\Phi) = \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\} = \Phi^{-1}(\{0\})$.

$\ker(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow \Phi$ injektiv.

Komposition wieder linear.

Beispiele: (1.) $\mathcal{A} \in \mathbb{K}^{p \times q} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{A}}: \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$, $x \mapsto \mathcal{A}x$

ist linear. $\ker(\Phi_{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}, 0)$.

(2). Ableitung und Integral!

Aufgabe 3: Welche der folgenden Abb sind $\mathbb{R}$-linear?

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

$f_2: \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \; \Phi \mapsto \Phi(1)$

$f_3: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \; p \mapsto \text{Grad}(p)$

$f_4: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, \; A \mapsto \text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} A(i,i)$

$f_5: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; (x_1, .., x_n) \mapsto x_1$

$f_6: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; (x_1, .., x_n) \mapsto \max\{x_1, .., x_n\}$

$f_7: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; (x_1, .., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\cancel{f_8: \mathbb{R}^n}$

Lösung:

f_1: $f(1+1) = f(2) = 4$
$f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ $\neq$ nein

f_2: Seien $\Phi, \Psi \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$:

(i) $f_2(\Phi + \Psi) = (\Phi + \Psi)(1) = \Phi(1) + \Psi(1) = f_2(\Phi) + f_2(\Psi)$ ✓

(ii) $f_2(a \cdot \Phi) = (a \cdot \Phi)(1) = a \cdot \Phi(1) = a \cdot f_2(\Phi)$. ✓

ja

f_3: $f_3(X + X) = f(2X) = 1$
$f_3(X) + f_3(X) = 1 + 1 = 2$ $\neq$ nein

f_4: $f_4(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (A + B)(i,i) = \sum A(i,i) + \sum B(i,i) = \ldots$ ✓

$f_4(\lambda \cdot A) = \sum (\lambda A)(i,i) = \sum \lambda A(i,i) = \lambda \ldots$ ✓ ja

f_5: ja

f_6: $f_6((1,0) + (0,1)) = f((1,1)) = 1$
$f_6((1,0)) + f_6((0,1)) = 1 + 1 = 2$ $\neq$ nein

f_7: ja

Leicht: Hom(V,W) ist UVR von Abb(V,W). ~~Insbeson~~

Außerdem:

$$\boxed{\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p) \cong \mathbb{K}^{p \times q}}$$

$$\varphi: \quad (x \mapsto \mathcal{A}x) \longleftarrow \mathcal{A}$$

$$\varphi^{-1}: \quad \Phi \longmapsto (\Phi(e_1) | \ldots | \Phi(e_q))$$

(i) $\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi^{-1}(x \mapsto \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}e_1 | \ldots | \mathcal{A}e_q) = \mathcal{A}$ ✓

(ii) $(\varphi(\varphi^{-1}(\Phi)))(x) = (\varphi((\Phi(e_1)|\ldots|\Phi(e_q))))(x)$

$= (\Phi(e_1) | \ldots | \Phi(e_q)) \cdot x$

$= (\Phi(e_1) | \ldots | \Phi(e_q)) \cdot (x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_q \cdot e_q)$

$= (\Phi(e_1) | \ldots | \Phi(e_q)) \cdot x_1 \cdot e_1 + \ldots + (\Phi(e_1) | \ldots | \Phi(e_q)) x_q \cdot e_q$

$= x_1 \cdot \Phi(e_1) + \ldots + x_q \cdot \Phi(e_q) = \Phi(x_1 e_1 + \ldots + x_q e_q)$

$= \Phi(x)$. ✓

Aufgabe 4: Seien V, W $\mathbb{k}$-VR, $V_1, V_2 \leq V$, $W_1 \leq W$.

$\Phi: V \to W$ linear. Zeige:

(a) $V_1 \cap V_2 \leq V$

(b) $\Phi(V_1) \leq W$

(c) $\ker(\Phi) \leq V$

(d) $\Phi^{-1}(W_1) \leq V$

Beweis: (a) (i) $0 \in V_1, V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

(ii) Seien $x, y \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x+y \in V_1$ und $x+y \in V_2$

$\Rightarrow x+y \in V_1 \cap V_2$.

(iii) Seien $\lambda \in \mathbb{k}$ und $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \lambda x \in V_1$ und $\lambda x \in V_2$

$\Rightarrow \lambda x \in V_1 \cap V_2$. ✓

(b) (i) $0 \in V_1 \Rightarrow \Phi(0) \in \Phi(V_1) \Rightarrow \Phi(V_1) \neq \emptyset$

(ii) Seien $x, y \in \Phi(V_1)$, d.h. es existiert $a, b \in V_1$

mit $x = \Phi(a)$, $y = \Phi(b)$ $\Rightarrow x+y = \Phi(a) + \Phi(b)$

$= \Phi(\underbrace{a+b}_{\in V_1}) \Rightarrow x+y \in \Phi(V_1)$

(iii) Sei $\lambda \in \mathbb{k}$, $x \in \Phi(V_1)$ $\Rightarrow$ es existiert $a \in V_1$

mit $x = \Phi(a) \Rightarrow \lambda x = \lambda \Phi(a) = \Phi(\underbrace{\lambda a}_{\in V_1}) \Rightarrow \lambda x \in \Phi(V_1)$

✓

(d) $\Rightarrow$ (c) !

(d) (i) $\Phi(0) = 0 \in W_1 \Rightarrow \Phi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$

(ii) Seien $x, y \in \Phi^{-1}(W_1)$, d.h. $\Phi(x), \Phi(y) \in W_1$

$\Rightarrow \Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(x+y) \in W_1 \Rightarrow x+y \in \Phi^{-1}(W_1)$

(iii) Seien $x \in \Phi^{-1}(W_1)$ und $\lambda \in \mathbb{k}$, also $\Phi(x) \in W_1$

$\Rightarrow \lambda \Phi(x) = \Phi(\lambda x) \in W_1 \Rightarrow \lambda x \in \Phi^{-1}(W_1)$ ✓

$\square$

<u>Aufgabe 5</u>: Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Dann ~~gilt~~ sind äquivalent:

(a) Φ injektiv

(b) Φ surjektiv

(c) Φ bijektiv

$\Phi(x) = Ax$

<u>Beweis</u>: ~~Satz 8.2(b)~~: Φ injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(A) = n$ $\not\!\!\#$ Spalten: inj.

$\Leftrightarrow$ Φ surjektiv $\Leftrightarrow$ Φ bijektiv. $\square$