Aufgabe 2

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit der Abbildungsmatrix $A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) Berechne eine Basis B von $U := \ker(\Phi)$ und ergänze sie zu einer Basis $\tilde{B}$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Berechne die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $\tilde{B}$.

c) Finde eine Basis B' eines Φ-invarianten Unterraums V mit $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

d) Berechne die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $B \cup B'$.

Beweis. a) Wir lösen das homogene LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Fundamentallösungen des homogenen LGS bilden eine Basis B des Kerns:

$$B := \{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

...welche wir zu einer Basis $\tilde{B}$ des $\mathbb{R}^3$ erweitern:

$$\tilde{B} := B \cup \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

b) Für die gesuchte Abbildungsmatrix $D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\Phi)$ gilt:

$$D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\Phi) = D_{\tilde{B}S}(\mathrm{id}_{R^3}) \cdot A \cdot D_{S\tilde{B}}(\mathrm{id}_{R^3})$$

(wobei S die Standardbasis bezeichne). Es gilt:

$$D_{S\tilde{B}}(\mathrm{id}_{R^3}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{\tilde{B}S}(\mathrm{id}_{R^3}) = D_{S\tilde{B}}(\mathrm{id}_{R^3})^{-1} \overset{\text{Gauß}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Und wir erhalten:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{B}\tilde{B}}(\Phi) &= D_{\tilde{B}S}(\mathrm{id}_{R^3}) \cdot A \cdot D_{S\tilde{B}}(\mathrm{id}_{R^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Zunächst ist klar: $\dim(U) = 2 \Rightarrow \dim(V) = 1$, d.h. $V = \langle b \rangle$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$.

Und wegen der Φ-Invarianz muss gelten $\Phi(\langle b \rangle) \subseteq \langle b \rangle$, also $\Phi(b) = \lambda \cdot b$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Erklärung für die, die genau wissen wollen, wie man auf die Bedingung $\Phi(b) = 12 \cdot b$ kommt

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert eine lineare Abbildung $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}^3/U$ mit $\tilde{\Phi}([v]) = [\Phi(v)]$ (wende den Homomorphiesatz auf $\kappa \circ \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ an). In unserem Fall gilt dann (die Basisvektoren von $\tilde{B}$ seien $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$):

$$\tilde{\Phi}(\left[\tilde{b}_3\right]) = \left[\Phi(\tilde{b}_3)\right] = \left[-3 \cdot \tilde{b}_1 - 2 \cdot \tilde{b}_2 + 12 \cdot \tilde{b}_3\right] = \left[12 \cdot \tilde{b}_3\right] = 12 \cdot \left[\tilde{b}_3\right]$$

Ist $V = \langle b \rangle$ ein Φ-invariantes Komplement von U, so gilt mit $b = \lambda_1 \cdot \tilde{b}_1 + \lambda_2 \cdot \tilde{b}_2 + \lambda_3 \cdot \tilde{b}_3$:

$$\tilde{\Phi}([b]) = \tilde{\Phi}(\left[\lambda_3 \cdot \tilde{b}_3\right]) = \lambda_3 \cdot \tilde{\Phi}(\left[\tilde{b}_3\right]) = 12 \cdot \lambda_3 \cdot \left[\tilde{b}_3\right] = 12 \cdot \left[\lambda_3 \cdot \tilde{b}_3\right] = 12 \cdot [b]$$

Aber andererseits:

$$\tilde{\Phi}([b]) = [\Phi(b)] = [\lambda \cdot b] = \lambda \cdot [b]$$

Also $\lambda = 12$ (sehr ausführlich).

Wir setzen also an:

$$\begin{aligned}
& & \Phi(b) &= 12 \cdot b \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \hat{b} &= 12 \cdot \hat{b} \\
&\Leftrightarrow & \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} - 12 \cdot I_3\right)\hat{b} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -12 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{b} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{b} &= 0
\end{aligned}$$

wobei $\hat{b} = D_{\tilde{B}}(b)$ die Koordinaten von b bzgl. der Basis $\tilde{B}$ sind. Wir erhalten als Lösung $\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, rechnen aber lieber weiter mit dem hübscheren Vielfachen $\hat{b} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -12 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir erhalten b (also die Koordinaten bzgl. der Standardbasis) via:

$$b = D_{S\tilde{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man hätte auch $A \cdot b = 12 \cdot b$ ansetzen können, um sich den Basiswechsel zu sparen (dafür wäre es wohl leicht komplizierter gewesen, eine Lösung des LGS abzulesen?).

d) Damit lautet die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $B \cup B'$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

□