LÖSUNGSSKIZZE BLATT 12

(OHNE GARANTIE. . .)

Lösungsskizze Aufgabe 56. Zu minimieren ist die Zeit

$$\int_0^A \underbrace{(1+(x')^2)^{\frac{1}{2}}(2y)^{-\frac{1}{2}}}_{=:f(y,x,x')} dy$$

unter den Nebenbedingung $x(0) = 0$, $x(A) = a$. Dabei zeigt unsere y-Achse nach unten, und oBdA (wieso?) seien a und A nichtnegativ. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$0 = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{=0} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'} = -\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}$$

also ist $\frac{\partial F}{\partial x'} =: C$ konstant. Das führt auf

$$(x')^2(1 - C^2 2y) = 2C^2 y$$

und wir betrachten mal physikalisch motiviert nur den Fall $x' \geqslant 0$ (formal müsste man den anderen Zweig auch ausrechnen und der führt dann hoffentlich auf kein Minimum). Also

$$x' = \sqrt{\frac{y}{K-y}}$$

für $K = \frac{1}{2C^2}$. Also

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{K-y}} + D$$

und substituiert man $\sqrt{\frac{y}{K-y}} = u$ dann erhält

$$\int \sqrt{\frac{y}{K-y}} = -K \int u \frac{d}{du}\frac{1}{1+u^2} du,$$

was nach partieller Integration und Rücksubstituieren die Lösung

$$x(y) = -\sqrt{y(K-y)} + K \arctan(\frac{y}{K-y})$$

liefert ($D = 0$ weil $x(0) = 0$). Was hat das nun mit einer Zykloide zu tun? Setzt man $\frac{y}{K-y} = \tan(\omega t)$ an dann erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{K}{2}\sin(-2\omega t + K\omega t \\ y(t) &= \frac{K}{2}(1 - \cos(-2\omega t)) \end{aligned}$$

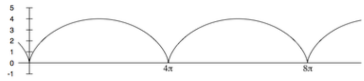
Mit $-2\omega = 1$ und $R := \frac{K}{2}$ ist das

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t - \sin(t)) \\ y(t) &= R(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

(und R müsste man noch so wählen dass $x(A) = a$ erfüllt ist). Das ist die Parameterdarstellung einer Zykloide.

Deshalb sieht die Lösung des Brachistrochronenproblems (y-Achse zeigt nach unten)

aus wie ein Stück einer an der x-Achse gespiegelte Zykloide



(Bilder von Wikipedia) □

Lösungsskizze Aufgabe 57. Gesucht ist der Graph einer Kette $(x, y(x))$, die durch (a, A), (b, B) geht. Dabei wird die y-Koordinate

$$(\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx)(\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx)^{-1}$$

des Schwerpunkts minimiert unter der Nebenbedingung, dass die Länge

$$L(y) := \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

gleich vorgegebenen Konstanten l ist.

Das ist natürlich äquivalent dazu, dass wir

$$F(y) := \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

unter der Nebenbedingung $L(y) = l$ und den Randbedingungen $y(a) = A$, $y(b) = B$ minimieren.

Man kann sich jetzt folgende hinreichende Bedingung überlegen, durch die man eine Lösung erhalten kann:

Idee. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante und y_0 eine Funktion, die

$$F(y) + \lambda L(y)$$

minimiert, dann minimiert y_0 auch $F(y)$ unter der Nebenbedingung $L(y) = L(y_0)$ (jeweils unter den üblichen Randbedingungen).

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} F(y) + \lambda L(y) &\geqslant F(y_0) + \lambda L(y_0) \\ \Rightarrow F(y) &\geqslant F(y_0) + \lambda \underbrace{(L(y_0) - L(y))}_{=0} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist 0 für alle y, die die Nebenbedingung $L(y) = L(y_0)$ erfüllen. □

Beachte, dass wir den korrekten Wert von λ später erst noch bestimmen müssen, so dass das zugehörige y_0 dann auch die richtige Länge $L(y_0) = l$ hat.

Also: Wir minimieren das Funktional

$$F(y) + \lambda L(y) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+y'^2}(y+\lambda)}_{=:h(x,y,y')} dx$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich umschreiben zu

$$\frac{d}{dx}(h - \frac{\partial h}{\partial y'} y') = 0$$

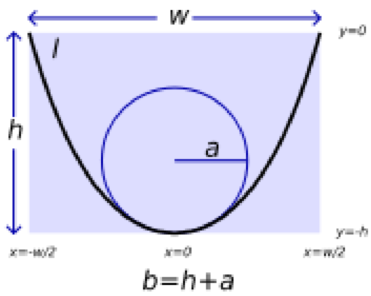
(das geht immer, wenn h nicht explizit von x abhängt). Also ist

$$h - \frac{\partial h}{\partial y'} y' = C$$

konstant und die daraus resultierende Differentialgleichung erster Ordnung kann man nach Trennung der Variablen integrieren und man erhält als Lösung

$$y(x) = C \cosh(\frac{x}{C} + D) - \lambda.$$

Die Nebenbedingung und die zwei Randbedingungen führen auf drei Gleichungen, aus denen man die Konstanten C, D, λ bestimmen kann, und das ist dann hoffentlich eine minimierende Lösung des Variationsproblems mit λ, so dass die Idee oben eine Lösung des Ursprungsproblem liefert. Das sieht dann irgendwie so aus für $A = B$.



Tatsächlich gibt es mehrere Lösungen, bei der einen ist der Schwerpunkt unter der Nebenbedingung *maximiert* (Euler-Lagrange macht da ja keinen Unterschied, die Lösung muss nichtmal extremal sein. . .). □

Jetzt hatte ich noch erklärt, wieso C^∞-Mannigfaltigkeiten so definiert sind wie sie das sind (damit man sinnvoll von glatten Funktionen zwischen ihnen sprechen kann. . .).

Lösungsskizze Aufgabe 58. Zu zeigen war, dass

$$\mathcal{A}' := \{\varphi \colon U \xrightarrow{\cong} V : \ \varphi \text{ Karte, die mit } \mathcal{A} \text{ verträglich ist}\}$$

der maximale Atlas ist, der $\mathcal{A}$ enthält.

Es ist klar, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$. Falls $\mathcal{A}'$ ein Atlas ist, dann ist es auch klar dass er maximal unter denen ist, die $\mathcal{A}$ enthalten (denn alle Karten eines Atlas, welcher $\mathcal{A}$ enthält, müssen natürlich insbesondere mit den Karten aus $\mathcal{A}$ verträglich sein).

Noch zu zeigen ist also, das $\mathcal{A}'$ ein Atlas ist. Dazu muss man vor allem beweisen, dass die Übergangsfunktion

$$\psi(U \cap U') \xrightarrow{\varphi\psi^{-1}} \varphi(U \cap U')$$

zweier Karten $\varphi \colon U \to V$, $\psi \colon U' \to V'$, die mit $\mathcal{A}$ verträglich sind, glatt ist. Nun ist aber $\bigcup_i U_i = X$, also $\bigcap_i \psi(U \cap U' \cap U_i) = \psi(U \cap U')$, und da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist genügt es zu zeigen, dass die eingeschränkten Übergangsfunktionen

$$\psi(U \cap U' \cap U_i) \xrightarrow{\varphi\psi^{-1}} \varphi(U \cap U' \cap U_i)$$

alle glatt sind. Die können wir aber auch schreiben als die Komposition

$$\psi(U \cap U' \cap U_i) \xrightarrow{\varphi_i \psi^{-1}} \varphi_i(U \cap U' \cap U_i) \xrightarrow{\varphi \varphi_i^{-1}} \varphi(U \cap U' \cap U_i)$$

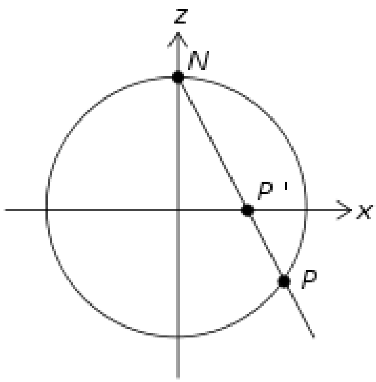
zweier Funktionen die beide nach Voraussetzung glatt sind (φ, ψ sind mit $\mathcal{A}$ verträglich). $\square$

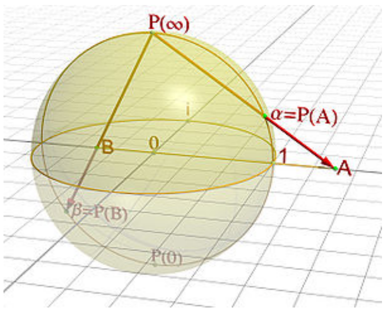
Lösungsskizze Aufgabe 59. Es ist der top. Raum

$$S^{n-1} := \{(x_i) : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

(induzierte Topologie) mit einem Atlas aus 2 Karten auszustatten, so dass S^{-n1} zu einer $(n-1)$-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit wird.

Idee: Stereographische Projektion





Wir bezeichnen also mit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ den Nordpol und definieren eine Abbildung

$$\varphi_N : \begin{cases} S^{n-1} \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}, \\ \qquad U \mapsto \text{Durchstoßpunkt der Gerade durch } N \text{ und } U \text{ mit } \mathbb{R}^{n-1} \cong \{x_n = 0\} \end{cases}$$

In Koordinaten sieht das dann so aus:

$$\varphi_N(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{x_1}{1 - x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n})$$

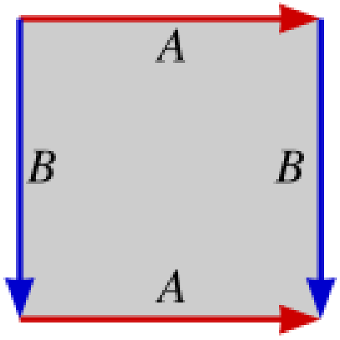
Dass φ_N eine Karte ist sieht man am einfachsten, wenn man versucht, eine Umkehrabbildung ausrechnen, und bemerkt dass die Funktionen beide stetig und invers zueinander sind.

Analog definiert man sich eine Karte $\varphi_S : S^{n-1} \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^{n-1}$, wobei S der "‘Süd-pol"’ ist.

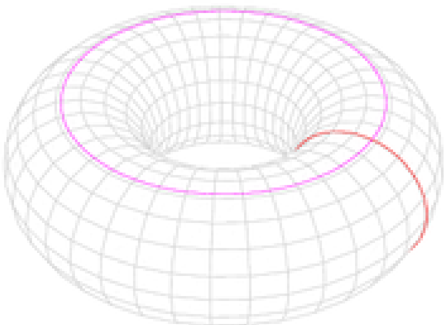
Dass die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist sieht man den entsprechenden Formeln dann leicht an. $\square$

Lösungsskizze Aufgabe 60. Interessant ist nur der Teil mit dem Atlas.

Man stellt sich $\mathbb{R}^2/\sim$ am besten als Quadrat vor, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils identifiziert werden.



Der Raum $\mathbb{R}^2/\sim$ ist übrigens homöomorph zum Torus



(blau = lila), und deshalb schreibe ich jetzt immer "‘Torus"’...

Jetzt erinnert (?) man sich, dass die Quotiententopologie so definiert ist dass $U \subseteq \mathbb{R}^2/\sim$ genau dann offen ist wenn das Urbild $\pi^{-1}(U)$ unter der kanonischen Projektion offen ist. Die Teilmenge $Q := \pi((0,1) \times (0,1))$ des Torus z.B. ist offen, weil das Urbild eine disjunkte Vereinigung offener Quadrate im $\mathbb{R}^2$ ist. Insbesondere sieht man so, dass π eingeschränkt auf das offene Quadrat $(0,1) \times (0,1)$ einen Homöomorphismus auf Q ist. Das wäre also eine Karte.

Durch Verschieben des Ausgangsquadrats erhält man weitere Karten, und die sind alle verträglich miteinander da die entsprechende Übergangsfunktion eine Translation im $\mathbb{R}^2$ ist. $\square$