Zentr... und Normalisator

Operation von G auf G:

$g \cdot m := gmg^{-1}$

$\rightsquigarrow$ Konj. klasse (von m in G) $\overset{G \cdot m}{:=} \{gmg^{-1} : g \in G\}$ (Bahn)

Zentrum (von G) $Z(G) := \{m \in G : gmg^{-1} = m \ (\forall g)\}$ (FPe)
kommut mit allen

Zentralisator (von m) (in G) $C_G(m) := \{g \in G : gmg^{-1} = m\} = \mathrm{Stab}_G(m) \overset{UG}{\leq} G$
kommut mit m
(Stabilisator)

Klassenformel: $\#G = \#Z(G) + \sum_{\substack{r \in R \\ r \notin Z(G)}} \underbrace{(G : C_G(r))}_{\substack{\| \text{ (immer)} \\ \#(G \cdot m)}}$ (BB)

Bem: $Z(G) \subseteq C_G(m)$, $Z(G) \trianglelefteq G$

$\langle m \rangle \subseteq C_G(m)$

Operation von G auf $\mathcal{U}(G)$: (Menge aller UGen von G)

$g \cdot U := gUg^{-1}$

$\rightsquigarrow$ ~~KZKF~~ konj. klasse: $\{gUg^{-1} : g \in G\}$

NTer: $\{U : gUg^{-1} = U \ (\forall g)\} = \{U : U \trianglelefteq G\}$

Normalisator: $\underset{N_G(U)}{\underset{\|}{\{g \in G : gUg^{-1} = U\}}} \trianglelefteq$

Bem: $Z(G) \subseteq N_G(U)$, $\quad (G : N_G(U)) = \#(G \cdot U)$

$U \trianglelefteq N_G(U)$,

A1: $U \trianglelefteq V \subseteq G \Rightarrow V \subseteq N_G(U)$,

also $N_G(U)$ größter ~~[illegible]~~ Uge in G, ~~[illegible]~~ in der U NTer ist!

Bew: $\forall v \in V: \; vUv^{-1} = U \Rightarrow v \in N_G(U)$

$\Rightarrow V \subseteq N_G(U)$. $\square$

A2: $G/Z(G)$ zykl. $\Rightarrow$ G abelsch

Bew: $G/Z(G) = \langle a Z(G) \rangle$ ~~$= \langle \ldots \rangle$~~

$$\Rightarrow G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} a^k Z(G)$$

und für $g = a^k z$, $h = a^l w \in G$ gilt:

$$gh = a^k \underset{\substack{\in \\ Z(G)}}{z} a^l w = z a^k a^l w = \underset{\substack{\in \\ \ldots}}{z} a^l a^k \underset{\substack{\in \\ \ldots}}{w}$$

$$= a^l w a^k z = hg$$ $\square$

p-Gruppen

G Gruppe, p prim

p-Gruppe: $\#G = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$

~~A3: $\#G \neq p^2 \Rightarrow G$ abelsch~~

~~Bew:~~

A3: G p-Gruppe $\Rightarrow Z(G) \neq \{1\}$

Bew: Klassenformel:

$$\underbrace{\#G}_{p\,|} = \#Z(G) + \sum_{\substack{r \in R \\ r \notin Z(G)}} \underbrace{(G : C_G(r))}_{p\,|}$$

$\Rightarrow p \mid \# Z(G)$ $\square$

A4: $\#G = p^2 \Rightarrow G$ abelsch

Bew: $Z(G) = G$: ✓

oder (A3)

$\#Z(G) = p \Rightarrow \#G/Z(G) = p$ zyklisch $\overset{A2}{\Longrightarrow}$ G abelsch (↯ zu $Z(G) \neq G$)

A5: $\#G = p^k \Rightarrow \exists$ Normalteiler $N \trianglelefteq G$: $\#N = p^{k-1}$

Bew: $k=1$: ✓

$k>1$: G abelsch: ✓ ($\Rightarrow$ ÜB) Also o.E. nicht abelsch.

$\Rightarrow \{0\} \overset{A3}{\subsetneq} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p-Gruppe}}}{Z(G)} \overset{\text{n.ab.}}{\subsetneq} G$

abelsch
$\Rightarrow \exists$ UGe $N \leq Z(G)$: $\# N = p$. ~~kanetr~~

$\Rightarrow N \trianglelefteq G$ und $\# G/N = p^{k-1}$

$\overset{IH}{\Rightarrow} \exists$ NTer $H \trianglelefteq G/N$: $\# H = p^{k-2}$

$\Rightarrow \exists$ NT $M \trianglelefteq G$: $H = M/N$ und

$\# M = \# H \cdot \# N = p^{k-2} \cdot p = p^{k-1}$.

$\square$

~~Folgerung~~
<u>Folgerung</u>:
$\forall \ell = 0, \dots, k$: $\exists$ UGe $U \leq G$. $\# U = p^\ell$
und es ex. ein Element d.O. p

Sylowsätze

G endlich, $\#G = p^k \cdot f$, $p \nmid f$, $p \mid \#G$

p-Sylowgruppe: UGe der Ordnung p^k

($\rightsquigarrow$ p-Gruppe) $\quad \underline{\#_p} := \#\{U \subseteq G : U \text{ UGe mit } \#U = p^k\}$

Sätze von Sylow:

(1) $\#_p \mid f$

(2) $\#_p \equiv 1 \pmod p$

(3) je zwei p-Sylowgruppen sind konjugiert

(4) jede p-Gruppe ist in einer p-Sylowgruppe enthalten

Folgerung: $p^l \mid \#G \Rightarrow \exists$ UGe der Ordnung p^l

und ein Element der Ordnung p

Bew: $p^l \mid p^k$, ~~$\Rightarrow$~~ wähle p-SGe P und wende AS an! $\square$

Bemerkung:

- $\left.\begin{array}{l} P \text{ p-Sylow} \\ Q \text{ q-Sylow} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{od}]{p \neq q} P \cap Q = \{1\}$

- P p-Sylow.

  $P \trianglelefteq G \Longleftrightarrow \#_p = 1$

- $\#_p = \#(G \cdot P) = (G : N_G(P))$ für eine p-Sylowgruppe P

A6: Bestimme alle Gp. d. O. 45.

Lsg: $45 = 5 \cdot 9$

$$\left.\begin{array}{l} \#_5 \mid 9 \\ \#_5 \equiv 1 \pmod 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \#_5 = 1,\ \exists U \trianglelefteq G: \ \#U = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \#_3 \mid 5 \\ \#_3 \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \#_3 = 1,\ \exists V \trianglelefteq G: \ \#V = 9$$

$\Rightarrow$ ~~$U \& V \trianglelefteq G$ und~~ und $U \cap V = \{1\}$

~~$\Rightarrow$~~

$\Rightarrow UV = U \times V,$

$\#(UV) = 5 \cdot 9 = 45$

$\Rightarrow G \cong U \times V$

und $\#U = 5,\ \#V = 3^2 \rightsquigarrow$ ~~G abelsch~~ ~~G abelsch~~ $U \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $V \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$

$\rightsquigarrow G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \overset{CR}{\cong} \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$

oder $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \overset{CR}{\cong} \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\square$

A7: $U \trianglelefteq G$ p-Gruppe $\Rightarrow U \subseteq \bigcap_{P \text{ p-Sylow}} P$

Bew: $\exists$ p-Sylow P_0: $U \subseteq P_0$

P p-Sylow $\Rightarrow \exists g \in G$: $P = gP_0g^{-1}$

$\Rightarrow U \overset{NT}{=} gUg^{-1} \subseteq gP_0g^{-1} = P$

$\square$

<u>A8</u>: Bestimme eine p-Sylowgruppe von S_p und deren Normalisator.

<u>Lsg</u>: $\#S_p = p! = p\underbrace{(p-1)!}_{p \nmid ..}$

⇝ jede p-Sylow ist zyklisch von Ordnung p

⇝ $\boxed{P = \langle (1\,2\,..\,p) \rangle}$ ist eine (also <u>alle</u> von p-Zykel erzeugt, da konj.)

⇝ $\boxed{\#_p = (p-2)!}$ (wähle Erzeuger $\pi = (1\,2\,\underbrace{...}_{\text{beliebig}})$)

und

$$\boxed{N_G(P)} = \{\pi \in S_p : \underbrace{\pi \overbrace{(1\,2\,..\,p)}^{=:\sigma} \pi^{-1} \in \langle (1\,2\,..\,p) \rangle}\}$$

~~Klar / Schreibe~~ $\Leftrightarrow (\pi(1)\,..\,\pi(p)) = \sigma^k$ $(k = 1,..,p-1)$

~~z.B. $(1\,2\,3\,4\,5)^2 = (1\,3\,5\,2\,4)$~~

~~$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in N_G(P)$~~

~~und $\#N_G(P) = \#G/\#_p = p(p-1)$~~

Es gilt:

$$\#N_G(P) = \#G/\#_p = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ziel der 1} \\ \text{beliebig } (\underline{\underline{p}})}}{p}\underset{\substack{\uparrow \\ k=1,..,\underline{p-1} \\ \text{für } \sigma^k}}{(p-1)}$$

⇝ eind. best. □

A9: Bestimme eine p-Sylow von $GL_3(\mathbb{F}_p)$.

Lsg: „Basisergänzung"

$\rightsquigarrow \#GL_3(\mathbb{F}_p) = (p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$

$\rightsquigarrow$ p-Sylows haben Ordnung p^3

Idee:

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

ist UG d.O. p^3.

$\square$

Kompositionsreihen

Normalreihe:

$$0 =: N_0 \trianglelefteq N_1 \dots \trianglelefteq N_k = G$$

mit $N_i \trianglelefteq N_{i+1} (\forall i)$. $(\cancel{\Rightarrow} N_i \trianglelefteq N_{i+k})$

Kompositionsreihe: Faktoren $\overbrace{N_{i+1}/N_i}^{\text{komp. faktoren}}$ einfach.
(existieren für alle endl. Gpen)

A10: Bestimme komp. reihe von $\overbrace{GL_3(\mathbb{F}_p)}^{\text{einer } p\text{-Sylow von}}$.

Lsg: Aus A9:

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_p \right\} \trianglelefteq P$$

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F}_p \right\} \trianglelefteq P$$

$$\leadsto \quad 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Idx } p \\ \leadsto \text{ einfacher Quot}}}{\trianglelefteq} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Idx } p \\ \leadsto \dots}}{\trianglelefteq} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Idx } p \\ \leadsto \dots}}{\trianglelefteq} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A11: Zeige:

$\left.\begin{array}{l}G \text{ endl., einfach.} \\ p \mid \#G.\end{array}\right\} \Rightarrow G$ zyklisch oder $\exists \Phi \in Aut(G): ord(\Phi) = p$

und finde zwei Komp.reihen mit $\overset{\text{nichtzykl.}}{\overbrace{G}}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als Faktoren!

Bew:

G einfach $\Rightarrow Z(G) \in \{\{1\}, G\}$

(1) $Z(G) = G$:

$\Rightarrow G$ abelsch, einfach

$\Rightarrow G$ zyklisch

(2) $Z(G) = \{1\}$:

$p \mid \#G \Rightarrow \exists g \in G: ord(g) = p$

$\rightsquigarrow \Phi: G \longrightarrow G, \; h \longmapsto ghg^{-1} \in Aut(G)$

$\rightsquigarrow ord(\Phi) \mid p$

Ann: $ord(\Phi) = 1$

$\Rightarrow gh = hg \quad (\forall h \in G)$

$\Rightarrow 1 \neq g \in Z(G)$ ↯

$\Rightarrow ord(\Phi) = p$. $\square$

Bsp: $G = A_5$, $2 = p \mid \#G = \frac{5!}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 60$.

- $S_5 \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq \{1\} \xRightarrow[\substack{A3(b)\\ \text{Autom.}}]{H=\langle(1\,2)\rangle \text{ kompl.}} \boxed{S_5 \cong A_5 \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

  $\Phi := c_{(1\,2)(3\,4)}$

- $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \trianglerighteq A_5 \trianglerighteq \{1\}$