Faktorgruppen

Normalteiler: UG $N \leq G$ mit

$gNg^{-1} \subseteq N$

$\Leftrightarrow \quad gNg^{-1} = N \qquad (\forall g)$

$\Leftrightarrow \quad gN = Ng$

Bez: $N \trianglelefteq G$

A1. $U \leq G$ einzige UG mit $\#U = n \Rightarrow U \trianglelefteq G$

Bew: Da $c_g \in \mathrm{Aut}(G)$:

$$\left.\begin{array}{l} gUg^{-1} = c_g(U) \leq G \text{ UG} \\ \#c_g(U) = \#U = n \end{array}\right\} \Rightarrow gUg^{-1} = U \quad (\forall g)$$

$\square$

$U \leq G$ UG

Rechtsnebenklassen: $\{gU : g \in G\} =: G/U$ (Faktorraum)

Linksnebenklassen: $\{Ug : g \in G\}$

Bsp ($gU \neq Ug$ tritt wirklich auf): $G := S_3$, $U := \langle (1\ 2) \rangle$

$$\Rightarrow \quad (2\ 3)U = \{(2\ 3), (2\ 3)\circ(1\ 2)\} = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$U(2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2)\circ(2\ 3)\} = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

$\Rightarrow \cancel{U \not\trianglelefteq G}$

$\Rightarrow \langle (1\ 2) \rangle \not\trianglelefteq S_3$

$N \trianglelefteq G$

Faktorgruppe G/N mit

$$(gN)\cdot(hN) := ghN$$

$\rightsquigarrow 1_{G/N} = N, \quad (gN)^{-1} = g^{-1}N, \ldots, \quad \#(G/N) = \cancel{\frac{\#G}{\#N}}\ (G:N) \underset{\substack{\uparrow \\ G \text{ end}}}{=} \frac{\#G}{\#N}$

Kanonische Projektion:

$$\pi_N : G \longrightarrow G/N, \ g \longmapsto gN$$

ist Hom. mit $\ker(\pi_N) = N$

$\Longrightarrow$ Normalteiler von $G \ \hat{=}$ Kerne von Homomorphismen $G \longrightarrow *$

$\Longrightarrow$ G einfach $\Longleftrightarrow$ alle Hom. $G \longrightarrow *$ sind konst. oder injektiv

A2: $H \subseteq G$ UG, $\#H < \infty$, $N \trianglelefteq G$, $(G:N) < \infty$. Dann:

$$\operatorname{ggT}(\#H, (G:N)) = 1 \implies H \subseteq N$$

Bew: Idee: $H \subseteq N \iff \pi_N(H) = \{1\}$

Sei also $h \in H$. Dann

$$\begin{cases} h^{\#H} = 1 & \Rightarrow \operatorname{ord}(\pi_N(h)) \mid \#H \\ \pi_N(h)^{\#(G/N)} = 1 & \Rightarrow \operatorname{ord}(\pi_N(h)) \mid \#(G/N) = (G:N) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \operatorname{ord}(\pi_N(h)) = 1 \implies \pi_N(h) = 1.$ $\square$

$\rightsquigarrow$ vgl. ÜBA4(a)

<u>Satz</u>: G, H Gruppen, $N \trianglelefteq G$. Dann:

$$f: \begin{cases} \mathrm{Hom}(G/N, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, H) \\ \tilde{\Phi} \longmapsto \tilde{\Phi} \circ \pi_N \end{cases}$$

ist injektiv, und

$$\mathrm{im}(f) = \{ \Phi \in \mathrm{Hom}(G, H) : N \subseteq \ker(\Phi) \}$$

<u>I.a.W.</u>:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi \text{ mit } N \subseteq \ker(\Phi)"] \arrow[d, "\pi_N"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists_1 \tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Homomorphiesatz</u>:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H \\ G/\ker(\Phi) \arrow[ur, dashed, "\exists_1 \tilde{\Phi}\ \boxed{\text{injektiv}}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow G/\ker(\Phi) \cong \mathrm{im}(\Phi)$$

<u>Bsp</u>:

$$\Phi: \begin{cases} (\mathbb{C}^\times, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \\ z \longmapsto |z| \end{cases}$$

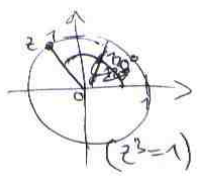
ist surj. Hom. mit

$$\ker(\Phi) = \{ z : |z| = 1 \} =: S^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{C}^\times / S^1 \cong \mathbb{R}_{>0}}$$

<u>Bsp</u>:

$$\Phi: \begin{cases} (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \\ q \longmapsto e^{2\pi i q} \end{cases}$$



ist Hom. mit

$$\ker(\Phi) = \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{im}(\Phi) = \{ e^{2\pi i q} : q \in \mathbb{Q} \} = \{ z \in \mathbb{C}^{(\times)} : \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1 \} =: W$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong W}$$

↑ <u>Einheitswurzeln</u> (bilden insbes. UGe!)

$\underline{A3}$: G zyklisch $\Rightarrow$ $G \cong \mathbb{Z}$ oder $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\underline{\text{Bew}}$: $G = \langle x \rangle \rightsquigarrow$ betrachte

$\Phi: \mathbb{Z} \longrightarrow G, \quad n \longmapsto x^n$

$\rightsquigarrow$ surj. Hom. ~~xxx~~ und

$\ker(\Phi) = \cancel{\mathbb{Z}a} \subseteq \mathbb{Z}$ UG

$\overset{\text{VSG}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}_0: \ker(\Phi) = n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong G} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ $\square$

$\underline{A4}$: $N \trianglelefteq G$, $M \trianglelefteq H$ $\Rightarrow (G \times H)/(N \times M) \cong (G/N) \times (H/M)$

$\underline{\text{Bew}}$:

$\Phi: G \times H \longrightarrow (G/N) \times (H/M), \quad (g,h) \longmapsto (gN, hM)$

ist surj. Hom. mit

$\ker(\Phi) = \{(g,h) : gN = N \text{ und } hM = M\} = N \times M$ $\square$

$\underline{\text{A5 („Zweiter Isomorphiesatz")}}$: $H \subseteq G$ UG, $N \trianglelefteq G$. Dann:

$H/(H \cap N) \cong HN/N$

$\underline{\text{Bew}}$: ÜB 2 $\rightsquigarrow$ $HN \subseteq G$ ~~xxx~~ UG, ~~xxxxx~~

$\Phi: H \longrightarrow HN/N, \quad h \longmapsto hN$

ist Hom., surjektiv, denn

$hnN \in HN/N \Rightarrow \Phi(h) = hN = hnN$

und

$\ker(\Phi) = \{h \in H : hN = N\} = \{h \in H : h \in N\} = H \cap N$. $\square$

vgl. ÜB A3

A6:

$$\left.\begin{array}{l} U, V \trianglelefteq G \\ U \cap V = \{1\} \end{array}\right\} \Longrightarrow UV \cong U \times V$$

Bew: (1) UV ist abelsch, denn:

$$uv = vu \iff uvu^{-1}v^{-1} = 1$$

aber

$$\underbrace{(uvu^{-1})}_{\in V}\underbrace{v^{-1}}_{\in V} = \underbrace{u}_{\in U}\underbrace{(vu^{-1}v^{-1})}_{\in U} \in U \cap V = \{1\}$$

(2) Betrachte

$$\Phi : U \times V \longrightarrow UV, \quad (u,v) \longmapsto uv$$

$\rightsquigarrow$ Surj. Hom. mit

$$\begin{aligned} \ker(\Phi) &= \{(u,v) \in U \times V : uv = 1\} \\ &= \{(u,v) \in U \times V : \underbrace{u = v^{-1}}_{\in U \cap V = \{1\}}\} = \{(1,1)\} \qquad \square \end{aligned}$$

Korrespondenten: $N \trianglelefteq G$

$$\{U \leq G \text{ UG} : N \leq U\} \longrightarrow \{\text{UGen von } G/N\}$$
$$U \longmapsto \pi(U) = U/N$$
$$\pi^{-1}(\tilde{U}) \longleftarrow \tilde{U}$$

und

$$\{M \trianglelefteq G : N \leq M\} \longrightarrow \{\text{NTer von } G/N\}$$
$$M \longmapsto \pi(M) = M/N$$
$$\pi^{-1}(\tilde{M}) \longleftarrow \tilde{M}$$

sind Bijektionen!

(ohne Beweis; „nachrechnen")

4/7

Gruppenoperationen

G Gruppe, M Menge

Operation von G auf M: Abb. $\bullet : G \times M \longrightarrow M$ mit

$$1 \bullet m = m \quad \text{und} \quad h \bullet (g \bullet m) = (hg) \bullet m \quad (\forall g, h \in G, m \in M)$$

Bem: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Operationen} \\ \text{von } G \text{ auf } M \end{array} \right\} \;\hat{=}\; \left\{ \begin{array}{l} \text{Hom.} \\ G \longrightarrow \mathrm{Sym}(M) \end{array} \right\}$

$$\bullet \longmapsto (\Phi : g \longmapsto m \longmapsto g \bullet m)$$

$$(g \bullet m := \Phi(g)(m)) \longleftarrow \Phi$$

~~Bsp (Linksmult): G auf G~~ $\cancel{g \bullet h := gh}$ ~~bzw.~~ $\cancel{L : \begin{cases} G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g \longmapsto (h \longmapsto gh) \end{cases}}$

Bsp (Linksmult.):

$$\bullet \begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ (g, m) \longmapsto gm \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad L : \begin{cases} G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g \longmapsto (m \longmapsto gm) \end{cases}$$

L ist injektiv, denn:

$$L(g) = L(\tilde{g}) \Longrightarrow g = L(g)(1) = L(\tilde{g})(1) = \tilde{g}$$

$\overset{\text{Homsatz}}{\Longrightarrow} G \cong L(G) \subseteq \mathrm{Sym}(G)$ UGe, d.h.

$\boxed{G \text{ ist isomorph zu einer UG von } \mathrm{Sym}(G)}$ (Satz von Cayley)

Bsp (Konjugation):

$$\begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ (g, m) \longmapsto gmg^{-1} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad C : \begin{cases} G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g \longmapsto (m \longmapsto gmg^{-1}) = c_g \end{cases}$$

Bsp: UG $U \leq Sym(M)$ operiert auf M einfach via

$$\begin{cases} U \times M \to M \\ (\varphi, m) \mapsto \varphi(m) \end{cases} \quad \text{bzw. d.h. } i: \begin{cases} U \to Sym(M) \\ \varphi \mapsto \varphi \end{cases}$$

~~G operiere auf M~~

~~⇝ ÄR $m_1 \sim m_2$:⇔ $\exists g \in G$: $m_1 = g \cdot m_2$~~

~~⇝ Äken heißen Bahnen~~

~~$M/\sim = \{G \cdot m : m \in M\}$ mit $G \cdot m = \{g \cdot m : g \in G\}$~~

~~G op. transitiv, falls $\#(M/\sim) = 1$~~

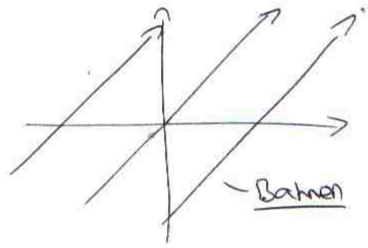
~~⇔ $G \cdot m = M$ für ein/alle $m \in M$~~

G operiere auf M

⇝ ÄR $m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow \exists g: m_1 = g \cdot m_2$

$\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ via Translation

$r \cdot \binom{x}{y} := \binom{x+r}{y+r}$



Bahnen:

$\{G \cdot m : m \in M\}$ (= Äken $M/\sim$!)

mit $G \cdot m := \{g \cdot m : g \in G\}$.

$\Rightarrow \boxed{M = \bigcup_m G \cdot m}$

Transitive Op: nur eine Bahn

$\Leftrightarrow G \cdot m = M$ für ein/alle $m \in M$

$\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \; \exists g \; m_1 = g \cdot m_2$

Stabilisator von m:

$Stab_G(m) := \{g \in G : g \cdot m = m\}$

m Fixpunkt: $Stab_G(m) = G$

$\Leftrightarrow g \cdot m = m \; (\forall g)$

⇝ Fixpunktmenge $M^G := \{m \in M : g \cdot m = m \; (\forall g)\}$

<u>Bahnbilanz</u>: G operiere auf M, $\#M < \infty$, $R \subseteq M$ Repräsentantensystem der Bahnen

$$\Longrightarrow \quad \#M = \sum_{m \in R} (G : \mathrm{Stab}_G(m))$$

<u>Bsp</u>: Operation von

$V_4 := \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4$

auf $\{1,2,3,4\} =: M$.

$\leadsto V_4 . 1 = \{1,2,3,4\} = M, \quad \mathrm{Stab}_{V_4}(1) = \{id\}$

$\leadsto$ <u>transitive</u> Operation, nur eine Bahn

$\leadsto$ Bahnbilanz: $\#M = 4$

$$\sum_{m \in \{1\}} (V_4 : \mathrm{Stab}_{V_4}(m)) = (V_4 : \mathrm{Stab}_{V_4}(1)) = \frac{4}{1} = 4$$

<u>Bsp</u>: Operation von

$G := \{id, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\} \subseteq S_4$

auf $\{1,2,3,4\} =: M$.

$\leadsto G . 1 = \{1,2\}, \quad G . 3 = \{3,4\},$

$\mathrm{Stab}_G(1) = \{id, (3\ 4)\}, \quad \mathrm{Stab}_G(3) = \{id, (1\ 2)\}$

$\leadsto$ Bahnbilanz: $\#M = 4$

$$\sum_{m \in \{1,3\}} (G : \mathrm{Stab}_G(m)) = 2 + 2 = 4$$

A7: Beweise den Satz von Lagrange via Bahnbilanz.

Bew: Betrachte Linkstransl. von UG $U \leq G$ auf G:

$U \times G \longrightarrow G$, $(u,g) \longmapsto ug$

$\leadsto$ Bahnen sind Linksnebenklassen $\{Ug : g \in G\}$,

$\mathrm{Stab}_U(g) = \{1\}$ $(\forall g)$

$\Rightarrow$ $(U : \mathrm{Stab}_U(g)) = \#U$ $(\forall g)$

$\Rightarrow$ $\#G = \sum_{m \in R} \#U$, also $\#U \mid \#G$ bzw. sogar

$\#U \cdot \underbrace{\text{„Anzahl Bahnen"}}_{\substack{= \text{„Anzahl LNk"} \\ = (G:U)}} = \#G$

$\square$

Symmetrische Gruppen

S_n operiert auf $\{1, \ldots, n\}$ via $\sigma \cdot k := \sigma(k)$

$\rightsquigarrow$ disjunkte Bahnen der Form

$$\{k, \sigma(k), \sigma^2(k), \ldots, \sigma^{\ell-1}(k)\}$$

$\hat{=}$ ℓ-Zykel $(k\ \sigma(k)\ \sigma^2(k)\ \cdots\ \sigma^{\ell-1}(k))$

$\rightsquigarrow$ Zykelzerlegung: jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich schreiben als

$$\sigma = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_m$$

mit ~~[illegible]~~ paarw. disjunkten Zykeln $\pi_1, \ldots, \pi_m$ (eindeutig bis auf Reihenfolge, die egal ist, und ohne 1-Zykel)

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma = (1\ 3\ 5) \circ (2\ 4)$

Korollar: $\sigma = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_m$ Zykelzerlegung, π_ℓ ist n_ℓ-Zykel

$\Rightarrow$ ~~ord~~ $\sigma^n = 1 \overset{\text{disj.}}{\Longleftrightarrow} \pi_1^n = \ldots = \pi_m^n = 1$

$\Longleftrightarrow n_1 | n, \ldots, n_m | n \Longleftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $\mathrm{kgV}(n_1, \ldots, n_m) | n$

$\Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(n_1, \ldots, n_m)$

[Im Bsp: $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(2,3) = 6$!]

Korollar: $S_n = \langle (a\ b) : a \neq b \rangle$

[denn $(a_1 \ldots a_m) = (a_1\ a_2) \circ (a_2\ a_3) \circ \ldots \circ (a_{m-1}\ a_m)$
und die Zykel erzeugen S_n !]

~~$\forall \sigma \in S_n$, $a_1,\dots,a_m$ paarw. verschieden (lese $\#\{a_1,\dots,a_m\}=m$), $\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq\{1,\dots,n\}$:~~

~~**A8**: $\boxed{\sigma\circ(a_1 \cdots a_m)\circ\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m))}$, d.h.~~

~~Konjugationen erhalten die Zykelstruktur~~

~~Bew: 1. Fall Sei $m\in\{1,\dots,n\}$.~~

A8: $\forall \sigma\in S_n$, $A:=\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq\{1,\dots,n\}$, $\#A=m$:

$$\sigma\circ(a_1 \cdots a_m)\circ\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m))$$

$\leadsto$ Konjug. erhält Zykelstruktur!

Bew: Sei $\ell\in\{1,\dots,n\}$.

1. Fall: $\ell=\sigma(a_i)$ für $i\in\{1,\dots,m-1\}$

$$\Rightarrow (\sigma\circ(a_1 \cdots a_m)\circ\sigma^{-1})(\ell) = \sigma(a_{i+1})$$
$$= (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m))(\ell)$$

2. Fall: $\ell=\sigma(a_m)$

$$\Rightarrow (\sigma\circ(a_1 \cdots a_m)\circ\sigma^{-1})(\ell) = \sigma(a_1) = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m))(\ell)$$

3. Fall: $\ell\neq\sigma(a_i)\ (\forall i) \Rightarrow \sigma^{-1}(\ell)\neq a_i\ (\forall i)$ und

$$(\sigma\circ(a_1 \cdots a_m)\circ\sigma^{-1})(\ell) = \ell = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m))(\ell) \qquad \square$$

Folge: $S_n = \langle (k\ \ k+1) : 1\le k<n\rangle \qquad (1)$

$\qquad = \langle (1\ \ k) : 1<k\le n\rangle \qquad (2)$

[Idee: $(k+1\ \ k+2)(k\ \ k+1)(k+1\ \ k+2) = (k\ \ k+2)$ etc. $\leadsto (1)$,

$(1\ \ k+1)(1\ \ k)(1\ \ k+1) = (k\ \ k+1) \overset{(1)}{\leadsto} (2)$]

<u>A9</u>: Zeige:

$V_4 := \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

ist der einzige NT von S_4 von Ordnung 4, und $S_4/V_4 \cong S_3$.

<u>Bew</u>: (1) $\forall \sigma \in S_4$:

$\sigma \circ id \circ \sigma^{-1} = id \in V_4$

$\sigma \circ (a\,b)(c\,d) \circ \sigma^{-1} \overset{A8}{=} (\sigma(a)\ \sigma(b)) \circ (\sigma(c)\ \sigma(d)) \in V_4$

$\Rightarrow V_4 \trianglelefteq S_4$

(2) Sei $N \trianglelefteq S_4$, $\#N = 4$, $\sigma \in N \setminus \{id\}$. Unterscheide nach dem ~~σ∈H~~ längsten Zykel in der Zykelzerlegung

~~1. Fall: 4 ⇒ σ = (1 2 3 4) ∈ N ⇒ {id, (1 2 3 4), (1 3)∘(2 4), (1 4 3 2)} ⊆ N aber N NT ⇒ (1 3)(2 4)~~

<u>1. Fall</u>: 4 $\overset{S_4}{\underset{(ds)}{\Longrightarrow}}$ $\sigma = (1\,2\,3\,4) \in N$

$\overset{A8}{\Longrightarrow} \{id, (1\,2\,3\,4), (1\,3\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,2\,3), \ldots\}$
$\subseteq N$ ↯ zu $\#N = 4$

<u>2. Fall</u>: 3 ↯ da dann $3 \mid ord(\sigma)$, $ord(\sigma) \in \{2, 4\}$ ↯

<u>3. Fall</u>: 2

(a) $\sigma = (a\,b)(c\,d) \rightsquigarrow V_4$

(b) $\sigma = (a\,b)$

$\overset{A8}{\Longrightarrow} \{(a\,b) : a \neq b\} \subseteq N \Rightarrow N = S_4$ ↯ zu $\#N = 4$

⇝ einzige NT der Ordnung 4.

(3) <u>Idee:</u> S_4 operiert auf

$M := \{\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \quad \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \quad \{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$

$(\# M = 3)$ ~~[illegible]~~, ~~liefert~~ (P-P-Op.) $\rightsquigarrow$ liefert

$\Phi: S_4 \to S_3$ <u>surjektiv</u> ~~[illegible]~~

und dann muss nach (1)+(2) gelten (mit Homsatz):

$\ker(\Phi) \cong V_4$.

$\square$