michael.walter@gmail.com

WH + Aufgaben + ÜB-Tipps

Magmen

Magma $(M, \cdot)$: Menge M mit Abb. $\cdot : M \times M \to M$

Oft: nur „M".

M assoziativ :$\iff$ $\cdot$ assoziativ

M kommutativ :$\iff$ $\cdot$ kommutativ

$\rightsquigarrow$ oft: „$+$" statt „$\cdot$"

Bsp. $(\mathbb{Z}, -)$

assoz.? $1-(0-1) = 2$ $\neq$ $(1-0)-1 = 0$

kommut.? $1-0 = 1$ $\neq$ $0-1 = -1$

Untermagma U von M: $U \subseteq M$ und $(U, \cdot|_{U \times U})$ Magma

$\iff$ $U \subseteq M$ und $U \cdot U \subseteq U$

Bsp. $\emptyset, M \subseteq M$ Untermagmen

Bsp.: $(\mathbb{N}_0, +) \ni \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 3\}$ $\rightsquigarrow$ ÜB 2 (a)

$\uparrow$

echtes Untermagma

$U \subseteq M$ Untermagma. Dann

M assoz $\Rightarrow$ U assoz
M kommut $\Rightarrow$ U kommut.

$X \subseteq M$

Magmenerzeugnis $\langle X \rangle_{\text{Magma}} := \bigcap\limits_{\substack{U \subseteq M \text{ Untermagma} \\ X \subseteq U}} U$ = „bel. geklammerte endl. Produkte von Elementen aus X"

↑ EZS

⇝ kleinste Untermagma, das X enthält

A1: Bestimme minimales EZS von $(\mathbb{Z}, -)$.

Lsg: Versuche ~~{1} / ... / betrachte~~

$\langle 1 \rangle_{\text{Magma}} =: U$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in U \\ \Rightarrow 1 - 1 = \underline{0 \in U} \\ \Rightarrow 0 - 1 = \underline{-1 \in U} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq U \subseteq \mathbb{Z}, \text{ also } \mathbb{Z} = U$$

□

Magmenhomomorphismus $\Phi\ M \to N$.

$$\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) \qquad (\forall x, y \in M)$$

⇝ $\Phi(M) \subseteq N$ Untermagma,
$\Phi^{-1}(U) \subseteq M$ Untermagma falls $U \subseteq N$ Untermagma

$$\leadsto \left.\begin{array}{l} M = \langle X \rangle_{\text{Magma}} \\ \Phi, \Psi : M \to N \text{ Hom} \\ \Phi|_X = \Psi|_X \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi = \Psi$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Magma}}(M,N) := \{\Phi : M \to N : \Phi \text{ Hom.}\}$

$\mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Magma}}(M,M)$: Magma bzgl. $\circ$ (sogar Monoid)

$\mathrm{Iso}_{\mathrm{Magma}}(M,N) := \{\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Magma}}(M,N) : \Phi$ bijektiv und $\Phi^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Magma}}(M,N)\}$

$= \{\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Magma}}(M,N) : \Phi$ bijektiv$\}$ ~~: Magma bzgl.~~ $\circ$

$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Magma}}(M) := \mathrm{Iso}_{\mathrm{Magma}}(M,M)$: Magma bzgl. $\circ$ (sogar Gruppe)

$\rightsquigarrow M \cong N \iff \mathrm{Iso}_{\mathrm{Magma}}(M,N) \neq \emptyset$

<u>A2</u>: $M, N \neq \emptyset$ Magmen. Welche konstanten Abb. $f : M \to N$ sind Hom.?

<u>Lsg</u>. Sei $c \in N$, $f \equiv c$

$$\begin{aligned} & f \text{ Hom} \\ \iff & \underset{\substack{\| \\ c}}{f(xy)} = \underset{\substack{\| \\ c^2}}{f(x)f(y)} \quad (\forall x,y \in M) \\ \iff & c = c^2 \\ \iff & c \text{ idempotent} \end{aligned}$$

$\square$

<u>A3</u>. Zeige: $(\mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}((\mathbb{Z},-)), \circ) \cong (\mathbb{Z}, \cdot)$

<u>Bew</u>: (1) Betrachte $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}((\mathbb{Z},-))$

$\overset{\text{A1}}{\rightsquigarrow}$ eind. bestimmt durch $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$

Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi(1-1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0 \\ \varphi(-1) &= \varphi(0-1) = \varphi(0) - \varphi(1) = -\varphi(1) \\ \varphi(2) &= \varphi(1-(-1)) = \varphi(1) - \varphi(-1) = 2\varphi(1) \\ \varphi(-2) &= \varphi(-1-1) = \varphi(-1) - \varphi(1) = (-2)\varphi(1) \end{aligned}$$

$\overset{\text{v.I.}}{\Longrightarrow} \boxed{\varphi(n) = n \cdot \varphi(1)}$

(2) Idee: Setze

$\Phi : (\mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}((\mathbb{Z},-)),\circ) \longrightarrow (\mathbb{Z},\cdot)\,,\quad \varphi \mapsto \varphi(1)$

- Φ injektiv, denn: $\langle 1 \rangle = (\mathbb{Z},-)$
- Φ surjektiv, denn:

  $n \in \mathbb{Z}$ bel. $\rightsquigarrow$ $\varphi : k \mapsto nk \in \mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}((\mathbb{Z},-))$ mit $\varphi(1) = n$
- Φ Hom, denn:

  $\Phi(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)(1) = \varphi(\psi(1)) \overset{(1)}{=} \psi(1)\cdot\varphi(1)$

  $= \varphi(1)\,\psi(1) = \Phi(\varphi)\cdot\Phi(\psi)$ $\square$

Folg: $(\mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}((\mathbb{Z},-)),\circ)$ ist kommutativ! Denn:

$M \cong N$. M assoz / kommut $\iff$ N assoz / kommut.

[z.B. $x\cdot y = \Phi^{-1}(\underbrace{\Phi(x)\,\Phi(y)}_{\text{Ann. kommut.!}}) = \Phi^{-1}(\Phi(y)\,\Phi(x)) = y\cdot x$]

Vgl: $(\mathrm{End}_{\mathrm{Magma}}(\mathbb{R}^n),\circ) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht kommut für $n \geq 2$ $\lightning$.

M, N Magmen

Direktes Produkt $M \times N$ mit

$(m,n)\cdot(\tilde{m},\tilde{n}) := (m\cdot\tilde{m},\; n\cdot\tilde{n})$

$\rightsquigarrow$ Projektionen $\pi_1 : M\times N \longrightarrow M,\ (m,n) \longmapsto m$

$\pi_2 : M\times N \longrightarrow N,\ (m,n) \longmapsto n$

sind Hom, und

$x = \tilde{x} \iff \pi_1(x) = \pi_1(\tilde{x})$ und $\pi_2(x) = \pi_2(\tilde{x})$ $\quad (*)$

A4 (UAE d. direkten Produkts):

$$\begin{tikzcd}
 & & M \\
A \arrow[urr, "\phi_1"] \arrow[rr, dashed, "\exists_1 \phi"] \arrow[drr, "\phi_2"'] & & M \times N \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & & N
\end{tikzcd}$$

„faktorisieren über $M \times N$“

$\forall$ Magmen A, Hom $\phi_1 : A \to M$, $\phi_2 : A \to N$
$\exists_1$ Hom $\phi : A \to M \times N$: $\phi_1 = \pi_1 \circ \phi$, $\phi_2 = \pi_2 \circ \phi$ $\Big\}$ (UAE)

Bew: (1) Existenz:

$\phi : A \to M \times N$, $a \mapsto (\phi_1(a), \phi_2(a))$

(2) Eind: $\phi, \breve{\phi}$ tun es

$$\Rightarrow \forall a: \left.\begin{array}{l} \pi_1(\phi(a)) = \phi_1(a) = \pi_1(\breve{\phi}(a)) \\ \pi_2(\phi(a)) = \phi_2(a) = \pi_2(\breve{\phi}(a)) \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \phi(a) = \breve{\phi}(a) \qquad \square$$

$(*)$ ~~denn~~ $(m, x) = (\breve{m}, \breve{x})$ $\Leftrightarrow$ Def

A5 (Eind. durch UAE). Ist X Magma, $\tau_1 : X \to M$, $\tau_2 : X \to N$ Hom mit

$\forall$ Magma A, Hom $\phi_1 : A \to M$, $\phi_2 : A \to N$
$\exists_1$ Hom $\phi : A \to X$: $\phi_1 = \tau_1 \circ \phi$, $\phi_2 = \tau_2 \circ \phi$

dann $X \cong M \times N$.

Bew:

$$\begin{tikzcd}
 & & M & & \\
X \arrow[urr, "\tau_1"] \arrow[rr, dashed, "\exists_1 \tau"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & & M \times N \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[rr, dashed, "\exists_1 \pi"] & & X \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_2"] \\
 & & N & &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\exists_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
 & M & \\
X \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[r, shift left, "\pi \circ \tau"] \arrow[r, shift right, "id"'] \arrow[dr, "\tau_2"'] & X \arrow[u, phantom] & X, \arrow[ul, "\tau_1"'] \arrow[dl, "\tau_2"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

d.h. $\pi \circ \tau = id$
genauso: $\tau \circ \pi = id$ $\qquad \square$

Bem: ~~keine Magmeneigenschaften benutzt! nur UAE und „Hom∘Hom ⊆ Hom“!~~

⇝ können (direktes) Produkt ~~für bel. Strukturen~~ über die UAE definieren!

Direktes Produkt (abstrakt) von M und N: Magma $M \times N$ und Hom $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$ mit (UAE).

Bem: funktioniert für beliebige Strukturen!

~~Verallg: $(M_i)_{i\in I}$ Magmen ⇝ $\prod_{i\in I} M_i$~~

Verallg: $(M_i)_{i\in I}$ Magmen

⇝ direktes Produkt $\prod_{i\in I} M_i$, $\pi_k : \prod M_i \to M_k$

Halbgruppen

Halbgruppe: assoziatives Magma

Unterhalbgruppe: Untermagma (selbst HG, da sich Assoz. vererbt!)

$$\rightsquigarrow \langle X \rangle_{HG} := \langle X \rangle_{Magma} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \quad \text{mit } X^n := \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n : x_i \in X\}$$

HG-Hom: Magmenhom., $\mathrm{Hom}_{HG}(H, L)$, ...

Direktes Produkt: wie bei Magmen

Monoide

Monoid M: Halbgruppe mit neutr. Element $1_M \in M$, d.h.

$$1_M \cdot x = x \cdot 1_M = x \quad (\forall x \in M)$$

Oft: $1_M =: 1$ (oder 0 falls „+" statt „·")

Bsp: $(\mathrm{Abb}(S,S), \circ)$, $1 = \mathrm{id}$; $(\mathcal{P}(S), \cap)$, $(\mathcal{P}(S), \cup)$

Untermonoid: Unter-HG, die 1 enthält (selbst Monoid)

Bsp: $\{1\} \subseteq M$ ~~[illegible]~~ „trivialer" Untermonoid!

Bsp: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0$ Unter-HG, aber nicht Untermonoid ($0 \notin \mathbb{N}$)

$$\rightsquigarrow \langle X \rangle_{Monoid} := \langle X \cup \{1\} \rangle_{HG} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n \quad \text{mit } X^0 := \{1\}$$

$$= \langle X \rangle_{HG} \cup \{1\} = \bigcap_{\substack{U \subseteq M \text{ Untermonoid} \\ X \subseteq U}} U$$

$\rightsquigarrow$ ÜB 3(a)

Monoidhom Φ: HG-Hom. mit

$$\Phi(1) = 1 \quad (\rightsquigarrow \Phi(M) \subseteq N \text{ Untermonoid})$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{Monoid}(M, N)$, ...

Bsp: $(\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$, $x \mapsto 0$

~~[illegible]~~

Direktes Produkt: wie bei Magmen

$\rightsquigarrow 1_{M\times N} = (1_M, 1_N)$

Bsp: $(\mathrm{Abb}(M,M), \circ)$ ist Monoid, neutr. Element ist id.

Betrachte

$$L: M \to \mathrm{Abb}(M,M),\ m \mapsto (n \mapsto m\cdot n)$$

$\rightsquigarrow L(mn)(o) = (m\cdot n)o = m(no) = L(m)(no)$

$= L(m)(L(n)(o)) = (L(m)\circ L(n))(o)$

$\Rightarrow L(mn) = L(m)\circ L(n)$, ~~also Hom.~~ und $L(1)(n) = 1\cdot n = n$, $L(1) = id$, also Hom.

und

$L(m) = L(n) \Rightarrow \underset{m}{\underset{\shortparallel}{L(m)(1)}} = \underset{n}{\underset{\shortparallel}{L(n)(1)}}$, also injektiv

$$\Rightarrow \boxed{M \cong L(M) \subseteq \mathrm{Abb}(M,M)}$$

„universell" (beachte: für $(\mathrm{Abb}(M,M),\circ)$ ist nur $\#M$ interessant, nicht $\circ$!!!)

~~($\rightsquigarrow$ später: jede Gruppe $\cong$ UG einer Sym(M))~~

($\rightsquigarrow$ später: $G \cong L(G) \subseteq \mathrm{Sym}(G)$)

<u>Gruppen</u>

M Monoid; $x \in M$ <u>invertierbar</u>: $\exists y \in M: \; xy = yx = 1$ $\quad$ Oft: $(y =: x^{-1})$ (oder $-x$ ...)

<u>$M^\times$</u> $:= \{x \in M : x \text{ invertierbar}\} \subseteq M$ Untermonoid ($\rightsquigarrow$ ÜB 4)

<u>Gruppe</u> G: G Monoid und $G^\times = G$

$\rightsquigarrow M^\times$ Gruppe für bel. Monoid M

<u>Bsp</u>: $(\mathbb{Z}, \cdot)^\times = \{\pm 1\}$ ‡, $(\mathbb{N}_0, +)^\times = \{0\}$ ‡ sind Gruppen ‡,

$(\mathbb{Z}, +)^\times = \mathbb{Z} \rightsquigarrow (\mathbb{Z}, +)$ Gruppe ‡,

$\mathrm{Sym}(M) := \{f : M \to M : f \text{ bijektiv}\}$ Gruppe,

$GL(n, \mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n \times n})^\times$

$\rightsquigarrow$ Untergruppen, Gruppenhom, ...

~~AB: $(M, \cdot)$ Magma / HG / Monoid / Gp $\Rightarrow$ $(\mathcal{P}(M), \cdot)$ Magma / HG / Monoid / Gp~~ ?

<u>WH</u>

<u>ÄGL</u>:

<u>ÄR</u> $\sim$ auf Menge M:

(i) $m \sim m$ (reflexiv)

(ii) $m \sim n \Rightarrow n \sim m$ (symm.)

(iii) $m \sim n$ und $n \sim o \Rightarrow m \sim o$ (transitiv)

<u>A7</u>: Zeige: S Menge. Dann def.

$$f \sim g \; :\Leftrightarrow \; \exists \varphi \in \mathrm{Sym}(S): \; f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

eine ÄR auf $\mathrm{Abb}(S, S)$.

Bew: (i) $h = \mathrm{id} \rightsquigarrow$ Reflexivität

(ii) $f \sim g \Rightarrow \cancel{\exists h: f \circ h = h \circ g}$

$\Rightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Sym}(S): f \circ \varphi = \varphi \circ g$

$$\underbrace{\varphi^{-1} \circ (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}}_{=\,\varphi^{-1} \circ f} = \underbrace{h^{-1} \circ (h \circ g) \circ h^{-1}}_{=\,g \circ \varphi^{-1}}$$

$\Rightarrow \underset{\mathrm{Sym}(S)}{g \circ \varphi^{-1}} = \varphi^{-1} \circ f \overset{\text{also}}{\Longleftrightarrow} g \sim f$ $\cancel{\varphi^{-1} \in \mathrm{Sym}(S)}$

(iii) $f \sim g$ und $g \sim h$

$\Rightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathrm{Sym}(S): \quad f \circ \varphi = \varphi \circ g$

$\qquad g \circ \psi = \psi \circ h$

$\Rightarrow (f \circ \underbrace{\varphi) \circ \psi}_{\in\, \mathrm{Sym}(S)} = \varphi \circ (g \circ \psi) = \underline{\varphi \circ \psi} \circ h$, also $f \sim h$ $\square$

~~**AA**: Für welche S def.~~

~~$f \sim g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Abb}(S,S): f \circ \varphi = \varphi \circ g$~~

~~eine ÄR auf $\mathrm{Abb}(S,S)$?~~

~~**Lsg:** 1. Fall: $S = \emptyset$ $\cancel{\Rightarrow \# \mathrm{Abb}(S,S) = 1}$ und~~

~~$\Rightarrow \mathrm{Abb}(S,S) = \{\emptyset\}$~~ ~~Idee: Abb $f: S \to T$ entspr. $\{(x, f(x))\} \subseteq S \times T$~~

~~und~~ ~~$\rightsquigarrow$ einzige Abb $\emptyset \to \emptyset$ ist $\emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$~~

~~$\emptyset \circ \emptyset = \emptyset \circ \emptyset$~~

~~$\Rightarrow \emptyset \sim \emptyset$, ÄR ✓~~

~~2. Fall ($S \neq \emptyset$): $\mathrm{id} \sim g \ \forall g \in \mathrm{Abb}(S,S)$, denn $f \circ \varphi = \varphi$ für $\varphi = \mathrm{const}$!~~

~~Wäre $\sim$ ÄR, dann~~

A8: Für welche $S \neq \emptyset$ def.

$$f \sim g \; :\Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Abb}(S,S): f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

eine ÄR auf $\mathrm{Abb}(S,S)$?

~~Be~~

~~Lsg: (1) Es gilt: $f \sim id$, $id \sim g$ $(\forall g \in \mathrm{Abb}(S,S))$~~

~~Denn: $f \circ \varphi = \varphi \circ g$~~

Lsg: 1. Fall: $S \neq \emptyset$. Dann gilt:

$id \sim g, \quad (\forall g)$

denn

$\varphi = \varphi \circ g$

für $\varphi \equiv c \in S$ beliebig! Wäre $\sim$ ÄR, dann gälte $g \sim id$,

also $\exists \varphi \in \mathrm{Abb}(S,S): \; g \circ \varphi = \varphi$

$\Rightarrow g(\varphi(c)) = \varphi(c)$, d.h. g hat Fixpunkt

$\Rightarrow \# S = 1$

Ist andererseits $\# S = 1$, so $\mathrm{Abb}(S,S) = \{id\}$ und $\sim$ ist ÄR! $(id \circ id = id)$

(2. Fall: $S = \emptyset$. Dann gilt: $\mathrm{Abb}(S,S) = \{\emptyset\}$ und $\sim$ ist ÄR: $(\emptyset \circ \emptyset = \emptyset)$)

??

$\square$

Fn $f: X \to Y$

$\hat{=}$ TM $\{(x, f(x)) \; x \in X\} \subseteq X \times Y$

$\hat{=}$ TM $F \subseteq X \times Y$

mit $(x,y), (x,\tilde{y}) \in F$

$\Rightarrow y = \tilde{y}$

~~$\leadsto \nexists$ Fn: $f: \emptyset \to \emptyset$~~

~~$\hat{=}$ TM ~~und~~ $\emptyset$ $\{(x, f(x)) \; x \in \emptyset\} \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$~~

~~$\leadsto$ ~~genau~~ eine Fn $\emptyset$!~~

$\leadsto$ Fn $f: \emptyset \to \emptyset$

$\hat{=}$ TM $F \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset \; \hat{=} \; F = \emptyset$

Exkurs: Kategorien

Betrachte

Mengen	Monoide	Magmen	k-VR	← Mengen mit Struktur (Objekte)
Abb.	Monoid-Hom.	Magmen-Hom.	k-lin Abb.	← Strukturerhaltende Abb (Morphismen)
~~Bij. Abb~~				
Set	Monoid	Magmas	k-Vec	Kategorie
			Mehr	Noch mehr?

Vorteile:

- Kategorie sagen ⇝ klar, was Morphismen, Isos, Endos, Autos sind

  z.B. $\Phi: A \to B$ Iso: Φ Mor und $\exists \underset{B\to A}{\Psi}$: Mor: $\Phi \circ \Psi = id_B$, $\Psi \circ \Phi = id_A$

- Diagramme wie in A5 machen oft in beliebigen Kategorien Sinn. (Knoten ≙ Obj, Pfeile ≙ Mor)

  ⇝ können ganz allg (direktes) Produkt definieren via

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[r, dashed, "\exists! \phi"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & A\times B \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

in Set: kartesisches Produkt

in Magma: s.o.

~~Frag~~

A9: Mehr ~~Top~~ Kategorie der metr. Räume mit stetigen Abb.

Was ist dort das ~~direkte~~ Produkt?

Lsg.: kart. Produkt mit $d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) := d_1(x,\tilde{x}) + d(y,\check{y})$.