Gruppen der Ordnung 45

1 Aufgabe. Bestimme alle Gruppen der Ordnung 45 (bis auf Isomorphie).

Lösung. Sei G eine Gruppe, $|G| = 45 = 3^2 \cdot 5$. Die Sylowsätze sagen:

$$\begin{aligned} s_3 &\mid 5, & s_5 &\mid 9 \\ 3 &\mid s_3 - 1, & 5 &\mid s_5 - 1 \\ \Rightarrow s_3 &= s_5 = 1 \end{aligned}$$

Es gibt also nur eine 3-Sylowgruppe S und eine 5-Sylowgruppe T, die daher auch jeweils Normalteiler sind, d.h.

$$\begin{aligned} &S, T \triangleleft G \\ &|S| = 9,\ |T| = 5 \\ &S \cap T = \{1\} \end{aligned}$$

Was ist ST? Seien $st, \hat{s}\hat{t} \in ST$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & st = \hat{s}\hat{t} \\ \Leftrightarrow\ \ & t\hat{t}^{-1} = s^{-1}\hat{s} \in S \cap T = \{1\} \\ \Leftrightarrow\ \ & s = \hat{s} \text{ und } t = \hat{t} \end{aligned}$$

Also $|ST| = |S| \cdot |T| = 45$, d.h. $ST = G$ (klar).

Betrachten wir den Kommutator zweier Elemente $s \in S, t \in T$:

$$\begin{aligned} sts^{-1}t^{-1} &= (sts^{-1})t^{-1} = s(ts^{-1}t^{-1}) \in T \cap S = \{1\} \\ \Rightarrow st &= ts \end{aligned}$$

(Bemerkung: Daraus folgt sogar, dass $G \cong S \times T$.)

Nun ist $|S| = 3^2$, nach der ersten Aufgabe des aktuellen Übungsblatts ist S also abelsch. Außerdem gilt $|T| = 5$, also ist T zyklisch und ebenso abelsch. Da wir aber gerade gesehen haben, dass die Elemente in S mit den Elementen in T kommutieren, ist die gesamte Gruppe G abelsch.

Nach dem Struktursatz für abelsche Gruppen gibt es also genau zwei Möglichkeiten, $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. □