Darstellungen kompakter Gruppen – Teil 2*

Michael Walter

Gegeben sei eine Darstellung $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer kompakten Gruppe G auf einem vollständigen, lokalkonvexen topologischen Vektorraum V.

1 Überblick

Wir definieren den **π-isotypischen Unterraum** V_π als die Summe aller zu $[\pi] \in \hat{G}$ äquivalenten Unterdarstellungen von V:

$$V_\pi := \sum \{U \leq V : U \ \sigma(G)\text{-invariant}, [\sigma(\cdot)|_U] = [\pi]\}$$

Die Menge der $\{V_\pi\}$ nennen wir die **G-Typen** für σ.

Desweiteren heißt ein Vektor $v \in V$ **$\sigma(G)$-endlich**, falls er in einer endlichdim. Unterdarstellung enthalten ist, also wenn $\dim \operatorname{span} \sigma(G)(v) < \infty$. Die Menge aller solcher Vektoren bezeichnen wir mir V^{fin}.
Da endlichdim. Darstellungen vollständig reduzibel sind, gilt $V^{\mathrm{fin}} = \sum_{[\pi]} V_\pi$. In Abschnitt 2 werden wir zeigen: Diese Summe ist direkt (und im unitären Falle sogar orthogonal).

Erinnern wir uns ferner an die **Matrizenkoeffizienten** einer Darstellung $[\pi] \in \hat{G}$, wie sie im vorigen Vortrag untersucht wurden:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\pi :=& \{\operatorname{tr}(\sigma(\cdot) \circ A) : A \in \operatorname{End}(V)\} \\ =& \{\lambda \circ \pi : \lambda \in \operatorname{End}(V)^*\} \end{aligned}$$

In Abschnitt 3 werden wir feststellen, dass diese gerade die π-isotypischen Unterräume der **rechtsregulären Darstellung**

$$\mathrm{R}^* : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{C}(G)), \ g \mapsto f \mapsto x \mapsto f(xg)$$

sind.

In Abschnitt 4 zitieren wir, dass die Matrizenfunktionen dicht in $\mathrm{C}(G)$ liegen – das ist der **Satz von Peter-Weyl**. Zusammen mit dem Vorhergehenden ergeben sich (1) die Endlichdimensionalität aller irreduziblen Darstellungen, (2) die **abstrakte Fourierzerlegung**

$$\mathrm{L}^2(G) = \text{HR-} \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^{\perp} \mathrm{M}_\pi,$$

(3) die Charakterisierung von G als projektiver Limes ihrer Bilder unter den endlichdim. Darstellungen

$$G = \varprojlim_{[\pi] \in \hat{G}} G / \ker \pi$$

und damit (4) eine Charakterisierung der kompakten Lie-Gruppen als diejenige kompakte Gruppen, die nicht beliebig kleine abgeschlossene Untergruppen enthalten.

Zuletzt beschreiben wir in Abschnitt 5 eine Konstruktion, die mit dem bis dahin Untersuchten eher weniger zu tun hat: Wir erhalten (funktoriell) für jede Darstellung $\tau : H \to \mathrm{GL}(U)$ einer abgeschlossenen Untergruppe $H \leq G$ eine **induzierte Darstellung** $\operatorname{Ind}_H^G \tau$ auf ganz G, und zwar in solch einer Weise, dass der Funktor Ind_H^G rechtsadjungiert ist zur Restriktion. Dieses Ergebnis ist als **Frobenius-Reziprozität** bekannt.

*basierend auf [DK00], Kapitel 4.4–4.7

2 G-Typen

1 Lemma. *(i) Für σ unitär, $f \in \mathrm{C}(G)$ gilt $\sigma(f)^* = \sigma(f^*)$ mit $f^* := \overline{\check{f}}$.*

(ii) Ist $f \in \mathrm{C}(G)$ konjugationsinvariant und $[\pi] \in \hat{G}$, so gilt $\sigma(f)|_{V_\pi} = \langle f, \chi_{\check{\pi}} \rangle \,\mathrm{id}$.

Beweis. Siehe [DK00, Lemmata 4.4.1 (iii) und 4.4.3]. □

2 Satz (Zerlegung in G-Typen)**.**

$$V^{fin} = \bigoplus_{[\pi]\in\hat{G}}^{(\perp)} V_\pi$$

und $P_\pi := d_\pi \sigma(\chi_{\check{\pi}})$ sind (orthogonale) Projektionen $V \to V_\pi$ (falls σ unitär).

Beweis. (1) Mit Lemma 1 (ii) und den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere folgt:

$$P_\pi|_{V_\tau} = d_\pi d_\tau^{-1} \langle \chi_{\check{\pi}}, \chi_{\check{\tau}} \rangle = \begin{cases} \mathrm{id} & , [\pi] = [\tau] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Damit folgt die Direktheit der Summe.
(2) Wir wollen nun zeigen, dass $P_\pi(V) \subseteq V_\pi$. Dazu betrachten wir für ein festes $v \in V$ dessen Bild $w := P_\pi(v)$ sowie die kleinste Unterdarstellung $S := \overline{\mathrm{span}}\, \sigma(G)(w)$, die w enthält. Die Abbildung

$$f : S' \to \mathrm{C}(G), \mu \mapsto \mu(\sigma(\cdot)(w))$$

ist linear und injektiv (Satz von Hahn-Banach), und es gilt

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \mu(\sigma(\cdot)(\int d_\pi \chi_{\check{\pi}}(y)\sigma(y)(v)dy)) \\ &= \int d_\pi \chi_{\check{\pi}}(y) \mu(\sigma((\cdot)y)(v))dy \\ &= \int d_\pi \underbrace{\chi_\pi(z^{-1}(\cdot))}_{=L(z)(\underbrace{\chi_\pi}_{\in \mathrm{M}_\pi}) \in \mathrm{M}_\pi} \mu(\sigma(z)(v))dz \in \overline{\mathrm{M}_\pi} = \mathrm{M}_\pi, \end{aligned}$$

denn M_π ist $L(G)$-invariant und endlichdimensional. Mit der Injektivität von f sowie dem Satz von Hahn-Banach erkennen wir nun aber

$$d_\pi^2 \geq \dim \mathrm{M}_\pi \geq \dim(S') = \dim(S),$$

also ist w $\sigma(G)$-endlich. Ist $w = \sum w_\tau$ die nach (1) eindeutige Zerlegung ($w_\tau \in V_\tau$), so gilt für alle $\mu \in V'$ nach obigem Argument

$$\underbrace{\mu(\sigma(\cdot)(w))}_{\in \mathrm{M}_\pi} = \sum \underbrace{\mu(\sigma(\cdot)(w_\tau))}_{\in M_\tau}$$

Da die Matrizenkoeffizienten inäquivalenter Darstellungen orthogonal sind, folgt für alle $[\tau] \neq [\pi]$

$$\begin{aligned} &\mu(\sigma(\cdot)(w_\tau)) = 0 \qquad (\forall \mu \in V') \\ \Rightarrow &\sigma(\cdot)(w_\tau) = 0 \\ \Rightarrow &w_\tau = 0 \end{aligned}$$

und damit $w = w_\pi \in V_\pi$.
(3) Für unitäres σ gilt mit Lemma 1 (i) $P_\pi^* = P_\pi$, d.h. P_π ist orthogonale Projektion. □

3 Matrizenkoeffizienten

Wir definieren die **Faltung** zweier stetiger Funktionen f, $g \in \mathrm{C}(G)$ durch

$$(f \star g)(x) := \int f(y)g(y^{-1}x)dy = \int f(xz^{-1})g(z)dz$$

3 Lemma (Eigenschaften der Faltung). *(i)* $(\mathrm{C}(G), \star)$ *ist eine assoziative Algebra; sie ist kommutativ gdw. G kommutativ ist.*

(ii) $f \star g = \mathrm{L}(f)(g)$, $\mathrm{R}^*(f)(g) = g \star \check{f}$

(iii) V *ist* $(\mathrm{C}(G), \star)$*-Modul vermittels* σ*, denn es gilt* $\sigma(f) \circ \sigma(g) = \sigma(f \star g)$

Beweis. Siehe [DK00, S. 230]. □

4 Satz (G-Typen und Matrizenkoeffizienten). *Für die Darstellung* $\sigma = \mathrm{R}^*$ *auf* $\mathrm{C}(G)$ *bzw.* $\mathrm{L}^2(G)$ *gilt:*

(i) $\mathrm{C}(G)_\pi = \mathrm{L}^2(G)_\pi = \mathrm{M}_\pi$, $P_\pi = d_\pi(\cdot) \star \chi_\pi = d_\pi \chi_\pi \star (\cdot)$

(ii) $\mathrm{C}(G)^{fin} = \mathrm{L}^2(G)^{fin} = \bigoplus_{[\pi]}^{\perp} \mathrm{M}_\pi =: \mathrm{M}(G)$

(iii) $\mathrm{M}(G) = \bigcup\{\mathrm{M}_\sigma : \sigma$ *endlichdim. Darstellung von* $G\}$

Beweis. (i) Wir wissen bereits, dass

$$R^*(\cdot)|_{\mathrm{M}_\pi} \cong \underbrace{\pi \oplus \ldots \oplus \pi}_{d_\pi \text{ mal}}$$

Damit liegt $\mathrm{M}_\pi \subseteq \mathrm{C}(G)_\pi \subseteq \mathrm{L}^2(G)_\pi$ (beinahe definitionsgemäß!).
Satz 2 und Lemma 3 (ii) zeigen die Formel für P_π (beachte: Falten mit einer konjugationsinvarianten Funktion ist kommutativ). Dann gilt aber für $f \in \mathrm{L}^2(G)$

$$\begin{aligned} P_\pi f &= d_\pi \chi_\pi \star f = d_\pi R^*(\check{f})(\chi_\pi) \\ &= d_\pi \int \underbrace{\check{f}(z)\, R^*(z)(\underbrace{\chi_\pi}_{\in \mathrm{M}_\pi})}_{\in \mathrm{M}_\pi} dz \in \overline{\mathrm{M}_\pi} = \mathrm{M}_\pi, \end{aligned}$$

denn M_π ist $R^*(G)$-invariant. Folglich ist $\mathrm{L}^2(G)_\pi = \mathrm{C}(G)_\pi = \mathrm{M}_\pi$.
(ii) folgt dann unmittelbar aus Satz 2.
(iii) gilt wegen $\mathrm{M}_\sigma + \mathrm{M}_\tau = \mathrm{M}_{\sigma \oplus \tau}$. □

4 Peter-Weyl

5 Satz (Peter-Weyl).

$$\overline{\mathrm{M}(G)}^{||\cdot||_\infty} = \mathrm{C}(G)$$

Unmittelbare Konsequenz dieser unscheinbaren Aussage ist das folgende Korollar, was die Fourierzerlegung auf beliebige kompakte Gruppen verallgemeinert.

6 Korollar (Abstrakte Fourierzerlegung). *Es gilt*

$$\mathrm{L}^2(G) = HR\text{-} \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^{\perp} \mathrm{M}_\pi,$$

d.h. wir können jedes $f \in \mathrm{L}^2(G)$ *zerlegen als*

$$f = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi \chi_\pi \star f \qquad (\mathrm{L}^2\textit{-Konvergenz})$$

und es gilt die **Parseval-Plancherel-Formel**

$$||f||^2 = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi ||\pi(f)||_{HS}^2$$

Ist f konjugationsinvariant (z.B. wenn G abelsch ist), so bilden die Charakter eine ONB, d.h. es gelten

$$\begin{aligned} f &= \sum_{[\pi] \in \hat{G}} \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi \qquad (\mathrm{L}^2\textit{-Konvergenz}) \\ ||f||^2 &= \sum_{[\pi] \in \hat{G}} |\langle f, \chi_\pi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Beweis. (1) Nach dem Satz von Peter-Weyl liegt $\mathrm{M}(G) \subseteq \mathrm{C}(G)$ dicht; definitionsgemäß gilt die auch für $\mathrm{C}(G) \subseteq \mathrm{L}^2(G)$. Deshalb liegt auch $\mathrm{M}(G) \subseteq \mathrm{L}^2(G)$ dicht, denn gleichmäßige Konvergenz impliziert L^2-Konvergenz. Nun war die Summe der Matrizenkoeffizienten gemäß Satz 4 ja direkt und orthogonal; zusammen erhalten wir also

$$\mathrm{L}^2(G) = \overline{\mathrm{M}(G)} = \text{HR-} \overset{\perp}{\bigoplus_{[\pi]\in\hat{G}}} \mathrm{M}_\pi$$

(2) Es gelten also

$$\begin{aligned} f &= \sum_{[\pi]\in\hat{G}} P_\pi(f) = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi \chi_\pi \star f \qquad (\mathrm{L}^2\text{-Kvgz.}) \\ ||f||^2 = ||\overline{f}||^2 &= \sum_{[\pi]\in\hat{G}} ||P_\pi(\overline{f})||^2, \end{aligned}$$

(in Satz 4 hatten wir die orthog. Projektionen ausgerechnet), und die Parseval-Plancherel-Formel folgt mit

$$\begin{aligned} ||P_\pi(\overline{f})||^2 &= \langle P_\pi(\overline{f}), \overline{f}\rangle = d_\pi \langle \overline{f} \star \chi_\pi, \overline{f}\rangle \\ &= d_\pi \int\int \overline{f}(y^{-1}x)\chi_\pi(y) f(x) dy dx \\ &= d_\pi \int\int f^*(x^{-1}y) f(x)\chi_\pi(y) dx dy \\ &= d_\pi \int (f^* \star f)(y)\chi_\pi(y) dy \\ &= d_\pi \operatorname{tr} \int (f^* \star f)(y)\pi(y) dy \\ &= d_\pi \operatorname{tr} \pi(f^* \star f) = d_\pi ||\pi(f)||^2_{\mathrm{HS}} \end{aligned}$$

(für die letzte Gleichheit siehe Lemmata 1 (ii) und 3)
(3) Ist f konjugationsinvariant, so liefert Lemma 1 (i) für $\mathrm{R}^*(\check{f})$ und M_π die folgende Identität

$$P_\pi(f) = d_\pi \chi_\pi \star f = d_\pi \, \mathrm{R}^*(\check{f})(\chi_\pi) = \langle \check{f}, \chi_{\check{\pi}}\rangle \chi_\pi = \langle f, \chi_\pi\rangle \chi_\pi$$

Damit haben wir das Korollar bewiesen. □

7 Beispiel ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$)**.** Man kann nachrechnen, dass die Charaktere der abelschen Gruppe $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gerade die harmonischen Schwingungen

$$\chi_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times, x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i n x}$$

sind.
Der Satz von Peter-Weyl liefert also die gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, d.h. **periodischer** stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$, durch Linearkombinationen der $\{\chi_n\}$.
Und die abstrakte Fourierzerlegung wird hier ganz konkret zu

$$\begin{aligned} f &= \sum_n \langle f, e^{2\pi i n(\cdot)}\rangle e^{2\pi i n(\cdot)} \\ &= \sum_n \underbrace{\left(\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx\right)}_{=:\hat{f}(n)} e^{2\pi i n(\cdot)} \qquad (\mathrm{L}^2\text{-Kvgz.}) \\ ||f||^2 &= \sum_n |\hat{f}(n)|^2 \end{aligned}$$

8 Bemerkung (Distributionelle Formulierung)**.** Ist G eine Lie-Gruppe, so können wir den Raum der Distributionen $\mathrm{C}^\infty_{(c)}(G)$ betrachten. Korollar 6 liefert dann die **Plancherel-Formel**

$$\delta = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi \chi_\pi \qquad \text{(distr. Konvergenz)}$$

wobei δ die Dirac-Distribution $f \mapsto f(1)$ bezeichnet.
Das gilt sogar im Sinne von Radonmaßen und $\mathrm{L}^2(G)$-„Faltungskonvergenz“, vgl [DK00, S. 237].

Das folgende Korollar zeigt, dass wir bei der Definition des Duals $\hat{G}$ auf die Forderung nach endlicher Dimension verzichten können.

9 Korollar. *Jede irreduzible Darstellung $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ auf einem vollständigen, lokalkonvexen Vektorraum ist endlichdimensional.*

Beweis. V^{fin} ist Summe der irreduziblen endlichdim. Unterdarstellungen, da V irreduzibel ist also höchstens eine, ist also selbst endlichdimensional, und damit abgeschlossen!
Es verbleibt zu zeigen, dass V^{fin} dicht liegt in V; dazu wollen wir den Satz von Hahn-Banach anwenden. Es sei also $\lambda \in V'$ ein Funktional, welches V^{fin} annihiliert sowie $v \in V$ beliebig. Im Beweis von Satz 2 hatten wir die folgende Relation nachgerechnet:

$$\underbrace{\lambda(\underbrace{\sigma(x)(\underbrace{\mathrm{P}_\pi(v)}_{\in V_\pi})}_{\in V_\pi \leq V^{\mathrm{fin}}})}_{=0} = d_\pi(\lambda(\sigma(\cdot)(v)) \star \chi_\pi)(x)$$

Damit sind die „Fourier-Summanden“ aus Korollar 6 gleich 0, also auch $\lambda(\sigma(\cdot)(v))$ und insbesondere $\lambda(v)$. □

Aus dem Satz von Peter-Weyl folgt auch, dass wir Darstellung mit „beliebig feinen“ Kernen finden. Genauer:

10 Korollar. *In jeder Umgebung Ω der 1 findet man den Kern einer endlichdimensionalen Darstellung.*

Beweis. Sei $1 \neq x \in G$ beliebig. Wir wählen eine Funktion $f \in \mathrm{C}(G)$ mit $f(x) \neq f(1)$ (Lemma von Urysohn). Wegen dem Satz von Peter-Weyl können wir $f \in \mathrm{M}(G)$ annehmen. Nach Satz 4 (iv) ist f also Matrizenkoeffizient einer endlichdim. Darstellung σ und es gilt $\sigma(x) \neq \sigma(1) = \mathrm{id}$, also $x \in G \setminus \ker \sigma$. Folglich erhalten wir folgende offene Überdeckung

$$G \setminus \Omega \subseteq G \setminus \{1\} \subseteq \bigcup_\sigma G \setminus \ker \sigma$$

einer kompakten Menge. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{k=1}^n G \setminus \ker \sigma_k \supseteq G \setminus \Omega$ und definieren τ als direkte Summe dieser zugehörigen Darstellungen. Dann ist τ endlichdimensional, und es gilt

$$\ker(\tau) = \bigcap_{k=1}^n \ker \sigma_k \subseteq \Omega$$

□

11 Bemerkung. Das Korollar zeigt, dass jede kompakte Gruppe G projektiver Limes ihrer Bilder unter den endlichdim. Darstellungen ist

$$G = \varprojlim_\pi G/\ker \pi = \varprojlim_\pi \pi(G),$$

d.h. projektiver Limes kompakter linearer Lie-Gruppen! (Idee: Universelle Eigenschaft überprüfen; die Filterbasis der Kerne ist wegen dem Korollar feiner als der Umgebungsfilter der 1.)

Desweiteren können wir mit dem Korollar die folgende topologische Charakterisierung kompakter Lie-Gruppen beweisen (Schritt (ii) $\Rightarrow$ (iii)).

12 Korollar. *Sei G eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist eine Lie-Gruppe.

(ii) Es existiert eine Umgebung der 1, in der die triviale einzige abgeschlossene Untergruppe ist.

(iii) G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ für einen endlichdim. Vektorraum V.

5 Induzierte Darstellungen

Wir wollen wollen zunächst Darstellungen endlicher Gruppen studieren, wo sich die induzierte Darstellungen auf sehr natürliche Weise ergeben.

Für Ringe $S \leq R$ betrachten wir die Kategorie der S- bzw. R-Moduln. Bekanntlich ist dann der Hom-Funktor rechtsadjungiert zur Restriktion; genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Res}_S^R(M), N) &\cong \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(R, N)) \\ A(\cdot)(1) &\leftarrow\!\shortmid A \\ B &\mapsto (m \mapsto r \mapsto B(r \cdot m))\end{aligned}$$

Nun entsprechen die Darstellungen einer endlichen Gruppe G gerade den $\mathbb{C}[G]$-Moduln, wobei $\mathbb{C}[G]$ den Gruppenring von G bezeichnet.

Sei also $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und $H \leq G$. Dann entspricht $\sigma|_H$ der Restriktion $\operatorname{Res}_{\mathbb{C}[H]}^{\mathbb{C}[G]} V$ des zugehörigen $\mathbb{C}[G]$-Moduls.

Umgekehrt können wir uns nun fragen, wie für eine Darstellung $\tau : H \to \mathrm{GL}(U)$ die durch die Rechtsadjungierte induzierte Darstellung $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], U)$ aussieht. Es stellt sich heraus, dass deren Elemente gerade Funktionen $f : G \to U$ entsprechen, die die Bedingung

$$f(hg) = \tau(h)(f(g)) \qquad (\forall g \in G, h \in H)$$

Dies motiviert die folgende Definition (nach Umformulierung in die Rechtsmodulvariante; wieso eigentlich. . .).

13 Definition. Sei G eine Lie-Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossen und $\tau : H \to \mathrm{GL}(U)$ eine endlichdim. Darstellung. Dann heißt die durch

$$\begin{aligned}&V := \{f \in \mathrm{C}(G, U) : f(gh) = \tau(h^{-1})(f(g))\ \forall h \in H\}, \\ &\operatorname{Ind}_H^G(\tau) := L(\cdot)|_V\end{aligned}$$

definierte die durch τ von H auf G **induzierte Darstellung**.

So erhält man einen Funktor Ind_H^G, der tatsächlich rechtsadjungiert zur Restriktion ist:

14 Satz (Frobenius-Reziprozität)**.** *Für je zwei Darstellungen σ, τ von G, H haben wir den kanonischen Isomorphismus*

$$\operatorname{Hom}_G(\sigma, \operatorname{Ind}_H^G \tau) \to \operatorname{Hom}_H(\sigma|_H, \tau),\ A \mapsto A(\cdot)(1)$$

Beweis. Siehe [DK00, Satz 4.7.1]. □

15 Bemerkung (Geometrische Charakterisierung)**.** Der Bahnenraum $G \times_H U$ der Darstellung

$$\mathrm{R} \times \tau : H \to \mathrm{GL}(G \times U), h \mapsto (g, u) \mapsto (gh^{-1}, \tau(h)(u))$$

wird vermittels $\pi_{G/H} \circ \pi_1$ zu einem homogenen Vektorbündel über G/H mit Faser U (vgl. [DK00, Kapitel 2.4]). Er ist auch G-Modul mittels Multiplikation in der ersten Komponente.
Ist nun $s : G/H \to G \times_H U$ ein stetiger Schnitt, dann gehört zu jedem $g \in G$ in stetiger Weise ein $f(g) \in U$ mit

$$\begin{aligned}&s(gH) = [(g, f(g))] = [(gh, f(gh))] = [(g, \sigma(h)(f(gh)))] \\ \Rightarrow\ & f(gh) = \sigma(h^{-1})f(g)\end{aligned}$$

Andererseits erhält man für jedes solche f einen stetigen Schnitt. Somit entspricht $\operatorname{Ind}_H^G(\tau)$ dem Raum der **stetigen Schnitte** von $G \times_H U$.
Man kann jetzt noch nachrechnen, dass die korrespondierende Wirkung auf den Schnitten gerade $g \mapsto s \mapsto gs(g^{-1}(\cdot))$ ist.

Literatur

[DK00] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Lie Groups.* Springer, 2000.