

Der Satz von Ado

Michael Walter

Ziel des Vortrags war es, den folgenden Satz zu beweisen:

1 Theorem (Ado). *Jede endlichdim. Lie-Algebra hat eine treue endlichdim. Darstellung.*

Insbesondere kann man also jede endlichdim. Lie-Algebra als Unter algebra einer $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ auffassen, d.h. als Matrizen-Lie-Algebra.

Zunächst wurde die folgende Proposition gezeigt:

2 Proposition. *Sei \mathfrak{n} eine nilpotente endlichdim. Lie-Algebra mit $C^k(\mathfrak{n}) = 0$, kanonischer Einbettung $\sigma : \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ sowie*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j := \left(\sum_{i \geq j} \sigma(\mathfrak{n})^i \right) \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

Dann sind die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdim. Algebren, und der kanonische Homomorphismus

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

ist injektiv.

Beweis. (1) Aus dem Satz von PBW folgt direkt, dass die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdimensional sind (denn es fehlen höchstens die Basismonome mit weniger als j Faktoren).

(2) Es verbleibt zu zeigen, dass

$$\ker(\sigma_k) = \sigma(\mathfrak{n}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu setzen wir $d_j := \dim C^j(\mathfrak{n})$ und wählen eine Basis $\{e_i\}$ von \mathfrak{n} mit

$$\langle e_1, \dots, e_{d_j} \rangle = C^j(\mathfrak{n}) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

(klar: wähle Basis von C^{k-1} , erweitere zu Basis von C^{k-2} , usw.).

Wir weisen nun jedem Element in \mathfrak{n} sowie allen Monomen $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ ein Gewicht zu

$$w(x) := h \quad \text{für } 0 \neq x \in C^h(\mathfrak{n}) \setminus C^{h+1}(\mathfrak{n})$$

$$w(0) := \infty$$

$$w(e_{i_1} \cdots e_{i_s}) := \sum_{j=1}^s w(e_{i_j})$$

Nach Übungsaufgabe 4.2.7 gilt $[C^a(\mathfrak{n}), C^b(\mathfrak{n})] \subseteq C^{a+b}(\mathfrak{n})$, und es folgt

$$w([x, y]) \geq w(x) + w(y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{n} \quad (*)$$

Ferner gilt nach Wahl der Basis:

$$\sum_j c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad \Rightarrow \quad \forall j : c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad (**)$$

Sei nun $e_{i_1} \cdots e_{i_s} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ ein beliebiges Monom. Mittels

$$e_a e_b = e_b e_a + [e_a, e_b]$$

können wir es als LK von PBW-Basismonomen $e_1^{m_1} \cdots e_j^{m_j}$ schreiben. Wegen $[e_a, e_b]$ entstehen dabei zwar Monome kleineren Grades (und das Verfahren terminiert), wegen (*) und (***) ist das Gewicht jedes entstehenden Monoms allerdings nicht geringer.

Die Elemente von $\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$ sind LK von Produkten mit mindestens k Faktoren, können als LK von PBW-Basismonomen vom Gewicht $\geq k$ geschrieben werden. Die Elemente von $\sigma(\mathfrak{n})$ allerdings sind LK von PBW-Basismonomen mit Gewicht $\leq k-1$. Es liegt also nur die triviale LK 0 im Schnitt. \square

Damit gilt der Satz von Ado für nilpotente Lie-Algebren, denn für jede endlichdim. Algebra \mathcal{A} definiert die Linksmultiplikation

$$L : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), \quad x \mapsto L_x$$

$$L_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad y \mapsto xy$$

eine treue endlichdim. Darstellung ($L_x = 0 \Rightarrow x = x1 = 0$).

Man erhält nun leicht die folgende Aussage:

3 Proposition. *Seien $\mathfrak{n}, \mathfrak{l}$ endlichdim. Lie-Algebren, \mathfrak{n} nilpotent und*

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n} \rtimes_{\gamma} \mathfrak{l}$$

Dann hat \mathfrak{g} eine endlichdim. Darstellung, die treu auf \mathfrak{n} ist.

Der allgemeine Fall wird dann bewiesen, indem man die gegebene Lie-Algebra \mathfrak{g} (in einer recht technischen Konstruktion) in eine solche semidirekte Summe einbettet.

Dabei sorgt man dafür, dass das Zentrum von \mathfrak{g} in diesem nilpotenten Ideal liegen, so dass Proposition 3 eine Darstellung liefert, die treu auf dem Zentrum ist. Diese wird dann mit ad kombiniert, um eine treue Darstellung auf ganz \mathfrak{g} zu erhalten.