Der Satz von Ado*

Michael Walter

Es bezeichnet + (bzw. $\oplus$) stets die (direkte) Summe im Vektorraumsinne, und 0 den trivialen Vektorraum/Modul/Algebra (wo passend). Weiterhin bezeichne $\langle \dots \rangle$ das Vektorraum- und $(\dots)$ das Idealerzeugnis, und assoziative Algebren mit Eins nennen wir einfach Algebren.

1 Theorem (Ado). *Jede endlichdim. Lie-Algebra hat eine treue endlichdim. Darstellung.*

2 Proposition. *Sei $\mathfrak{n}$ eine nilpotente endlichdim. Lie-Algebra mit $C^k(\mathfrak{n}) = 0$, kanonischer Einbettung $\sigma : \mathfrak{n} \to \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ sowie*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j := (\sum_{i \geq j} \sigma(\mathfrak{n})^i) \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

Dann sind die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdim. *Algebren, und der kanonische Homomorphismus*

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \to \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

ist injektiv.

Beweis. (1) Aus dem Satz von PBW folgt direkt, dass die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdimensional sind (denn es fehlen höchstens die Basismonome mit weniger als j Faktoren).

(2) Es verbleibt zu zeigen, dass

$$\ker(\sigma_k) = \sigma(\mathfrak{n}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k \overset{!}{=} 0$$

Dazu setzen wir $d_j := \dim C^j(\mathfrak{n})$ und wählen eine Basis $\{e_i\}$ von $\mathfrak{n}$ mit

$$\langle e_1, \dots, e_{d_j} \rangle = C^j(\mathfrak{n}) \qquad (j = 0, \dots, k-1)$$

(klar: wähle Basis von C^{k-1}, erweitere zu Basis von C^{k-2}, usw.).

Wir weisen nun jedem Element in $\mathfrak{n}$ sowie allen Monomen $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ ein *Gewicht* zu

$$\begin{aligned} w(x) &:= h \quad \text{für} \quad 0 \neq x \in C^h(\mathfrak{n}) \setminus C^{h+1}(\mathfrak{n}) \\ w(0) &:= \infty \\ w(e_{i_1} \cdots e_{i_s}) &:= \sum_{j=1}^{s} w(e_{i_j}) \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 4.2.7 gilt $[C^a(\mathfrak{n}), C^b(\mathfrak{n})] \subseteq C^{a+b}(\mathfrak{n})$, und es folgt

$$w([x,y]) \geq w(x) + w(y) \quad \forall x, y, \in \mathfrak{n} \qquad (*)$$

Ferner gilt nach Wahl der Basis:

$$\sum_j c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad \Rightarrow \quad \forall j: \; c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \qquad (**)$$

Sei nun $e_{i_1} \cdots e_{i_s} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ ein beliebiges Monom. Mittels

$$e_a e_b = e_b e_a + [e_a, e_b]$$

können wir es als LK von PBW-Basismonomen $e_1^{m_1} \cdots e_j^{m_j}$ schreiben. Wegen $[e_a, e_b]$ entstehen dabei zwar Monome kleineren Grades (und das Verfahren terminiert), wegen (*) und (**) ist das Gewicht jedes entstehenden Monoms allerdings nicht geringer.

Die Elemente von $\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$ sind LK von Produkten mit mindestens k Faktoren, können als LK von PBW-Basismonomen vom Gewicht $\geq k$ geschrieben werden. Die Elemente von $\sigma(\mathfrak{n})$ allerdings sind LK von PBW-Basismonomen mit Gewicht $\leq k-1$. Es liegt also nur die triviale LK 0 im Schnitt. $\square$

Bemerkung. Damit gilt der Satz von Ado für nilpotente Lie-Algebren, denn für jede endlichdim. Algebra $\mathcal{A}$ definiert die Linksmultiplikation

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{A} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), \; x \mapsto L_x \\ L_x &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \; y \mapsto xy \end{aligned}$$

eine treue endlichdim. Darstellung ($L_x = 0 \Rightarrow x = x1 = 0$).

3 Lemma. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdim. Lie-Algebra, $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$ der kanonische Homomorphismus und $D \in$* der$(\mathfrak{g})$. *Dann existiert* genau ein $\tilde{D} \in \mathrm{der}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ *mit*

$$\sigma \circ D = \tilde{D} \circ \sigma$$

Beweis. Wir identifizieren $\mathfrak{g}$ und $\sigma(g)$.

(1) Eindeutigkeit: $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ wird (als Algebra) von $\mathfrak{g}$ und der Eins erzeugt. Für jede Derivation gilt aber $\tilde{D}(1) = 0$, und die geforderte Relation legt $\tilde{D}$ auf $\mathfrak{g}$ fest.

(2) Existenz: Wir betrachten die Algebra $\mathcal{A} := M_2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Dann ist

$$\phi : \begin{cases} \mathfrak{g} \to \mathcal{A}_L \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & D(x) \\ 0 & x \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus; die universellen Eigenschaft von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ liefert einen Algebren-Homomorphisus $\tilde{\phi} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ mit $\tilde{\phi} \circ \sigma = \phi$.

Da $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ und der Eins erzeugt wird und $\tilde{\phi}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten muss, ist auch $\tilde{\phi}$ von der Form

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{pmatrix} x & \tilde{D}(x) \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

*Nach [1], Kapitel 6.4

wobei $\tilde{D}$ eine Derivation ist; letzteres folgt aus den Homomorphismus-Eigenschaften von $\tilde{\phi}$, insbesondere $\tilde{\phi}(xy) = \tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{D} \circ \sigma = D$. $\square$

Bemerkung. Aus den Homomorphismuseigenschaften von σ und der Eindeutigkeit von $\tilde{D}$ folgt sogar, dass die Abbildung $D \mapsto \tilde{D}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

4 Proposition. *Seien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}$ endlichdim. Lie-Algebren, $\mathfrak{n}$ nilpotent und*

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n} \rtimes_\gamma \mathfrak{l}$$

Dann hat $\mathfrak{g}$ eine endlichdim. Darstellung, die treu auf $\mathfrak{n}$ ist.

Beweis. Es gelte $C^k(\mathfrak{n}) = 0$. Dann liefert Proposition 2 den injektiven Homomorphismus

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \to \underbrace{\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k}_{=:\mathcal{A}}$$

und damit die treue Darstellung $L \circ \sigma_k : \mathfrak{n} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Weiterhin induziert γ nach der Bemerkung zu Lemma 3 eine Darstellung

$$\tilde{\gamma} : \mathfrak{l} \to \operatorname{der}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}))$$

Für die Derivationen $\tilde{\gamma}(x)$ gilt ja insbesondere $\tilde{\gamma}(x)(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{n}$, folglich

$$\tilde{\gamma}(x)(\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k) \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

und wir erhalten eine induzierte Darstellung $\bar{\gamma} : \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Man kann nun nachrechnen, dass

$$\pi : \ \mathfrak{n} \rtimes_\gamma \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), \ (n, x) \mapsto L_{\sigma_k(n)} + \bar{\gamma}(x)$$

eine Darstellung ist. Sie ist von der gewünschten Form. $\square$

5 Lemma. *Sei $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}$ nilpotentes Ideal der endlichdim. Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $x \in \mathfrak{g}$. Gibt es ein $n \in \mathfrak{n}$ so dass $\operatorname{ad}(x+n)$ nilpotent ist, so ist auch $\operatorname{ad}(x)$ nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathcal{F} = (g_0, \dots, g_k)$ eine maximale Fahne von Idealen in $\mathfrak{g}$, d.h. die Quotienten

$$\mathfrak{q}_j := \mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j \qquad (j = 0, \dots, k-1)$$

sind einfache $\mathfrak{g}$-Moduln (via ad) und damit auch *einfache* $\mathfrak{n}$-Moduln.

Da $\mathfrak{g}$ und damit die $\mathfrak{q}_j$ aber auch *nilpotente* $\mathfrak{n}$-Moduln sind, muss $\mathfrak{n}$ trivial auf den $\mathfrak{q}_j$ operieren. Folglich:

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{n}, \mathfrak{g}_{j+1}] \subseteq \mathfrak{g}_j \\
\Rightarrow\ &\operatorname{ad}(n)(\mathfrak{g}_{j+1}) \subseteq \mathfrak{g}_j \\
\Rightarrow\ &\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(n) = 0 \\
\Rightarrow\ &\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x+n)
\end{aligned}$$

Es sind also alle $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x)$ nilpotent, was äquivalent zur Nilpotenz von $\operatorname{ad}(x)$ ist. $\square$

6 Lemma. *Sei $\mathfrak{r}$ eine auflösbare endlichdim. Lie-Algebra mit endlichdim. Darstellung (ρ, V). Dann gilt:*

$$\mathfrak{n}_\rho := \{x \in \mathfrak{r} \mid \rho(x) \text{ nilpotent}\} \trianglelefteq \mathfrak{r}$$

Beweis. O.E. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (sonst komplexifizieren). Nach dem Satz von Lie existiert eine vollständige Fahne $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_k)$ in V mit $\rho(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$.

Bekanntlich gilt $\mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \trianglelefteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$ und damit ist auch

$$\rho^{-1}(\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})) = \{x \in \mathfrak{r} \mid \forall j : \rho(x)(V_{j+1}) \subseteq V_j\} = \mathfrak{n}_\rho$$

(beachte $\dim V_j = j$; Induktion) ein Ideal. $\square$

7 Bemerkung. Angewendet auf die ad-Darstellung des auflösbaren Radikals einer endlichdim. Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ erhalten wir, dass

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{ad}} := \{x \in \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \mid \operatorname{ad}(x) \text{ nilpotent}\}$$

ein nilpotentes Ideal von $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ (Satz von Engel) bzw. sogar von $\mathfrak{g}$ ist (Korollar 4.4.15). Tatsächlich ist es das *maximal nilpotente Ideal* von $\mathfrak{g}$, denn jedes nilpotente Ideal ist im Radikal und damit auch in $\mathfrak{n}_{\mathrm{ad}}$ enthalten (Satz von Engel).

Beweis. [Beweis von Satz 1] Idee: Wir betten $\mathfrak{g}$ in eine semidirekte Summe eines nilpotenten Ideals und einer reduktiven Lie-Algebra ein, und wenden dann Proposition 4 an.

Im Folgenden identifizieren wir isomorphe Objekte.

(1) Nach 4.6.8 existiert eine Levi-Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\operatorname{rad}(\mathfrak{g})}_{=:\mathfrak{r}} \rtimes \mathfrak{s}$$

mit halbeinfachem $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{g}$. Nach dem Satz von Weyl (4.5.22) ist $\mathfrak{r} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ halbeinfacher $\mathfrak{s}$-Modul, und Proposition 4.5.18 liefert die Zerlegung

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{r}(\mathfrak{s})$$

(2) Sei nun $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{z}_\mathfrak{r}(\mathfrak{s})$. Lemma 5.1.18 (i) zeigt, dass

$$\mathfrak{d} := (\operatorname{ad}(\mathfrak{h}))_s \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

eine abelsche Unteralgebra von Derivationen ist. Wir setzen

$$\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathfrak{d}$$

und zeigen im Folgenden, dass sich $\hat{\mathfrak{g}}$ als semidirektes Produkt von der gewünschten Form schreiben lässt.

(3) Nach Wahl von $\mathfrak{h}$ annihilieren die $\mathfrak{d}$ ja $\mathfrak{s}$, außerdem gilt $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] = 0$, und damit ist die (innere) direkte Summe

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{d} \leq \hat{\mathfrak{g}}$$

reduktiv nach Proposition 4.7.3 (ii). Ihr Zentrum ist $\mathfrak{d}$.

(4) Es gilt auch

$$\hat{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}) \rtimes \mathfrak{d} = \underbrace{(\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{d})}_{=:\hat{\mathfrak{r}}} \rtimes \mathfrak{s},$$

denn (beachte Übungsaufgabe 4.1.6): Einerseits gilt natürlich $\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d} = \hat{\mathfrak{r}}$, und wegen 4.3.7 (iii) auch $[\mathfrak{d}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$, also $\mathfrak{r} \trianglelefteq \hat{\mathfrak{r}}$.

Außerdem ist sicherlich $\hat{\mathfrak{r}} \oplus \mathfrak{s} = \hat{\mathfrak{g}}$. Wegen XXX findet man sogar, dass $\hat{\mathfrak{r}} = \mathrm{rad}(\hat{\mathfrak{g}}) \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}}$.

(5) Nach Proposition 5.1.11 (ii) bildet der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})/[\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})]$ schon $\mathfrak{h}$ surjektiv ab (das Bild ist ja seine eigene CUA). Folglich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}) &= [\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})] + \mathfrak{h} \\ &\subseteq [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{h} \\ \Rightarrow \qquad \mathfrak{r} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{h} \end{aligned}$$

(6) Wir können also jedes $x \in \mathfrak{r}$ schreiben als

$$x = n + h \qquad (n \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}], h \in \mathfrak{h})$$

Setze $d := (\mathrm{ad}(h))_s \in \mathfrak{d}$. Damit liegt $x - d \in \hat{\mathfrak{r}}$.

Nach Korollar 4.4.15 ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}}$ nilpotentes Ideal. Außerdem stimmen $\mathrm{ad}(h - d)$ und $\mathrm{ad}(h) - d = \mathrm{ad}(h)_n$ auf $\mathfrak{g}$ überein ($\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathfrak{d}$!), d.h. $\mathrm{ad}(h-d)$ ist nilpotent auf $\mathfrak{g}$, damit insbesondere auf $[\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{g}}]$ und somit auch auf ganz $\hat{\mathfrak{g}}$. Mit Lemma 5 und Bemerkung 7 erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \mathrm{ad}(x - d) \in \hat{\mathfrak{n}} := \{x \in \hat{\mathfrak{r}} \mid \mathrm{ad}(x) \text{ nilpotent}\} \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}} \\ \Rightarrow \quad & \hat{\mathfrak{r}} \subseteq \hat{\mathfrak{n}} + \mathfrak{d} \\ \Rightarrow \quad & \hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}} + \mathfrak{d} + \mathfrak{s} \end{aligned}$$

Die Elemente aus $\hat{\mathfrak{n}}$ operieren nilpotent auf $\mathfrak{g}$, die aus $\mathfrak{d}$ aber halbeinfach. Es gilt also $\hat{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{d} = 0$, und mit (4) sogar $\hat{\mathfrak{n}} \cap (\mathfrak{d} + \mathfrak{s}) = 0$. Folglich:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}} \ltimes \mathfrak{l}$$

Also ist $\hat{\mathfrak{g}}$ semidirekte Summe eines nilpotenten Ideals und einer reduktiven Lie-Algebra, welche $\mathfrak{g}$ enthält!

(7) Proposition 4 liefert nun eine endlichdim. Darstellung

$$\hat{\pi} : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(V),$$

die treu auf $\hat{\mathfrak{n}} \supseteq \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \supseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist (zentrale Elemente operieren nilpotent).

Damit ist auch $\pi := \hat{\pi}|_{\mathfrak{g}}$ injektiv auf $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, und

$$\pi \oplus \mathrm{ad} : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \ x \mapsto (\pi(x), \mathrm{ad}(x))$$

ist eine treue endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. $\square$

Literatur

[1] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Manuskript für eine Neuauflage von Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* 2008.