

# RELATIVE HOMOLOGIE

MICHAEL WALTER

## 1. EINFÜHRUNG

Es bezeichne  $\text{Top}$  die Kategorie der topologischen Räume,  $\text{hTop}$  die Homotopiekategorie und  $\text{Ab}$  die Kategorie der abelschen Gruppen. Unsere Kettenkomplexe bestehen immer aus abelschen Gruppen. Homotopie und Homotopieäquivalenz bezeichnen wir mit  $\simeq$ . Desweiteren steht  $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  für das Standard- $n$ -Simplex,  $D^m$  für die abgeschlossene  $m$ -dimensionale Einheitskugel und  $S^{m-1}$  für ihren Rand.  $F(M)$  ist die freie abelsche Gruppe mit Basis  $M$ .

**Singuläre Homologie.** Wir erinnern zunächst an den *singulären Komplex*  $C(X)$  eines topologischen Raums  $X$ . Das ist der Kettenkomplex definiert durch

$$C_n(X) := F(C(\Delta^n, X))$$
$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \sigma \mapsto \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Die Basiselemente heißen *Simplizes*, die Elemente in den  $C_n(X)$  *Ketten*, die in  $\ker(\partial_n)$  *Zykel* und jene in  $\text{im}(\partial_{n+1})$  *Ränder*. Die zugehörigen (*singulären*) *Homologiegruppen* sind dann gegeben durch

$$H_n(X) := \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1})$$

Wir wissen sogar, dass man so einen Funktor  $H_n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  erhält. Wegen der Homotopieinvarianz faktorisiert dieser sogar über  $\text{hTop}$ .

**Proposition 1.** *Für einen Punkt  $X$ , und also auch für jeden kontrahierbaren Raum, gilt*

$$H_n(X) = \begin{cases} 0 & , n > 0 \\ \mathbb{Z} & , n = 0 \end{cases}$$

In Abschnitt 2 werden wir die *reduzierten Homologiegruppen* einführen, welche für einen Punkt alle verschwinden.

**Retrakte.** Ein Teilraum  $A \subseteq X$  heißt *Retrakt* von  $X$  falls es eine stetige Abbildung  $r : X \rightarrow A$  gibt mit  $ru = \text{id}_A$  (dabei bezeichne  $i : A \rightarrow X$  die Inklusion).  $A$  heißt *Deformationsretrakt* von  $X$ , falls zusätzlich  $ur \simeq \text{id}_X$  relativ  $A$  gilt. Insbesondere ist dann  $A$  homotopieäquivalent zu  $X$ .

Die Sphäre  $\partial D^m$  ist beispielsweise kein Retrakt der Vollkugel  $D^m$  (wir werden das später beweisen). Sie ist aber sogar Deformationsretrakt der (offenen) punktierten Vollkugel  $D^m \setminus \{0\}$ . Ein anderes Beispiel liefern Zylinder und Möbiusband; sie haben ihre jeweiligen Mittellinien als Deformationsretrakte.

**Quotientenräume.** Identifizieren wir alle Punkte eines Teilraums  $A \subseteq X$  mittels der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \text{ oder } \{x, y\} \in A$$

so erhalten wir den *Quotientenraum*  $X/A := X/\sim$  (ausgestattet mit der Quotiententopologie).

Beispielsweise erhält man die  $m$ -Sphäre als Quotienten der  $m$ -dimensionalen Vollkugel modulo ihrem Rand:  $D^m/\partial D^m \cong S^m$  (zumindest für  $m \leq 2$  ist das intuitiv klar).

**Ziel.** In diesem Vortrag wollen wir untersuchen, wie die Homologiegruppen von  $A$ ,  $X$  und  $X/A$  zusammenhängen.

Da sich jeder Raum  $A$  in den (kontrahierbaren) Kegel  $A \times [0, 1]/A \times \{0\}$  einbetten lässt, wird im Allgemeinen nicht einmal  $H_n(A) \leq H_n(X)$  gelten. Keinesfalls können wir also erwarten, eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A) \longrightarrow 0$$

zu erhalten.

Allerdings hat man immer eine *lange* exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots,$$

Wir werden in Abschnitt 3 zeigen, dass die *relativen Homologiegruppen*  $H_n(X, A)$ , die darin auftauchen, schon unter recht schwachen Bedingungen (für sog. *gute Paare*) gerade den Homologiegruppen des Quotientenraums  $X/A$  entsprechen.

Damit werden wir dann in Abschnitt 4 die Homologiegruppen der Sphären berechnen. Also Korollar ergeben sich (1) der Fixpunktsatz von BROUWER und (2) ein Satz über die Dimensionsinvarianz homöomorpher Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Zuletzt beweisen wir in Abschnitt 5 die Äquivalenz simplizialer und singulärer Homologie für  $\Delta$ -Komplexe.

## 2. REDUZIERTER HOMOLOGIEGRUPPEN

Damit die Homologie eines Punktes nun wirklich trivial wird, betrachtet man gerne den *erweiterten Kettenkomplex*  $\tilde{C}(X)$  gegeben durch

$$\dots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit  $\epsilon(\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} n_{\sigma}$ , welcher auf die sogenannten *reduzierten Homologiegruppen*  $\tilde{H}_n(X)$  führen.

Diese Modifikation leistet das gewünschte, wie die folgende Modifikation zeigt.

**Proposition 2.** *Für  $X \neq \emptyset$  gilt*

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & , n > 0 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} & , n = 0 \end{cases}$$

*Beweis.* Nur  $n = 0$  ist interessant. Für jedes 1-Simplex  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$  gilt

$$\epsilon(\partial_1(\sigma)) = \epsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}) = 1 - 1 = 0,$$

also  $\text{im}(\partial_1) \subseteq \ker(\epsilon)$ , und  $\epsilon$  induziert eine surjektive Abbildung  $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit Kern  $\tilde{H}_0(X)$ . Es folgt  $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X)$  via  $[x] \mapsto (\epsilon(x), [x - \epsilon(x)\sigma_0])$  (für ein beliebiges aber festes 0-Simplex  $\sigma_0$ ).  $\square$

3. RELATIVE HOMOLOGIEGRUPPEN

**Topologische Paare.** Die Objekte in der Kategorie  $\text{Top}^2$  der (*topologischen*) *Paare* sind Paare  $(X, A)$ , wobei  $A \subseteq X$  ein Teilraum ist. Morphismen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sind stetige Abbildungen  $X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ .

Zwei Morphismen  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißen *homotop* wenn sie homotop über Morphismen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  sind. Damit ist auch klar, wann zwei Paare *homotopieäquivalent* sind. Ist  $A$  Deformationsretrakt von  $X$  so gilt beispielsweise  $(X, A) \simeq (A, A)$ .

**Relative Homologiegruppen.** Sei  $(X, A)$  ein Paar. Dann gilt  $C_n(A) \subseteq C_n(X)$  und es ist auf der Ebene der *Komplexe* möglich, die Quotienten  $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$  zu bilden. Diese bilden den *relativen Kettenkomplex*  $C(X, A)$

$$\dots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

dessen Randabbildung durch die Randabbildung von  $C(X)$  induziert wird. Die zugehörigen Homologiegruppen nennen wir die *relativen Homologiegruppen*  $H_n(X, A)$ .

Genauso wie im absoluten Fall induziert jeder Morphismus  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  *funktoriell* eine Kettenkomplexabbildung  $f_{\natural} : C(X, A) \rightarrow C(Y, B)$  und damit auch einen Gruppenhomomorphismus  $f_{\star} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .

Wir können zwei weitere Resultate auf die relative Homologie übertragen.

**Proposition 3** (Homotopieinvarianz). *Für homotope Morphismen  $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  gilt  $f_{\star} = g_{\star}$ .*

*Beweis.* Die Prismenabbildung  $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  aus dem Beweis der Homotopieinvarianz (MATTHIAS' Satz 3.2) schickt  $C_n(A)$  nach  $C_{n+1}(B)$ , induziert also eine Prismenabbildung  $P : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$  zwischen den Quotienten.

Die Relation

$$g_{\natural} - f_{\natural} = \partial P + P \partial$$

gilt dann aber immer noch, es folgt  $f_{\natural} \simeq g_{\natural}$  und  $f_{\star} = g_{\star}$  (TOBIAS' Lemma 5).  $\square$

**Korollar 4.** *Homotopieäquivalente Paare haben isomorphe Homologiegruppen.*

**Lange exakte Homologiesequenzen.** Aus der obigen Konstruktion ergibt sich rein algebraisch bereits eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen.

**Satz 5** (Lange exakte Sequenz mit relativen Homologiegruppen). *Für jedes Paar  $(X, A)$  erhalten wir funktoriell eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{l_{\star}} H_n(X) \xrightarrow{q_{\star}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

*Beweis.* Für jedes Paar  $(X, A)$  erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{l} C(X) \xrightarrow{q} C(X, A) \longrightarrow 0,$$

und für jeden Morphismus  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(A) & \xrightarrow{l} & C(X) & \xrightarrow{q} & C(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{\natural} & & \downarrow f_{\natural} & & \downarrow f_{\natural} \\ 0 & \longrightarrow & C(B) & \xrightarrow{l} & C(Y) & \xrightarrow{q} & C(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zusammen ist das ein Funktor von  $\text{Top}^2$  in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen und wir schalten nun einfach den Funktor aus JOACHIMS Satz 2 dahinter.  $\square$

Hieran sieht man schon, dass die relativen Homologiegruppen in einem gewissen Sinne den Unterschied zwischen den Homologiegruppen der Räume  $A \subseteq X$  messen (ohne dass aber eine der Gruppen in der anderen enthalten sein muss!).

Verswinden beispielsweise alle relativen Homologiegruppen  $H_n(X, A)$ , dann und nur dann sind die Homologiegruppen  $H_n(A) \cong H_n(X)$  jeweils isomorph.

Die Konstruktion relativer Homologiegruppen funktioniert auch ausgehend von den erweiterten Kettenkomplexen  $\tilde{C}(A)$  und  $\tilde{C}(X)$ ; wegen  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong 0$  führt dies allerdings auf den selben relativen Kettenkomplex  $\tilde{C}(X, A) \cong C(X, A)$ . Das beweist die folgende Proposition.

**Proposition 6** (Lange exakte Sequenz mit relativen und reduzierten Homologiegruppen). *Es gilt  $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ , und für jedes Paar  $(X, A)$  erhalten wir funktoriell eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

**Korollar 7** (relativ zu einem Punkt). *Es gilt  $\tilde{H}_n(X, \{x_0\}) \cong \tilde{H}_n(X)$  für jeden Punkt  $x_0 \in X$ .*

*Beweis.* Die reduzierten Homologiegruppen  $\tilde{H}_n(\{x_0\})$  des Punktes sind trivial nach Proposition 1 und 2. Nutze nun die lange exakte Sequenz.  $\square$

Auch für *topologische Tripel*  $(X, B, A)$ , also Teilräume  $A \subseteq B \subseteq X$ , lässt sich eine lange exakte Sequenz konstruieren.

**Proposition 8** (Lange exakte Sequenz für topologische Tripel). *Für jedes Tripel  $(X, B, A)$  erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \longrightarrow H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_{n-1}(B, A) \longrightarrow \dots$$

*Beweis.* Sie wird von der folgenden kurzen exakten Sequenz induziert:

$$0 \longrightarrow C(B, A) \xrightarrow{\iota_{\sharp}} C(X, A) \xrightarrow{\text{id}_{\sharp}} C(X, B) \longrightarrow 0$$

$\square$

**Ausschneideeigenschaft.** Der folgende zentrale Satz erlaubt es uns, bestimmte für die Homologie "irrelevante" Teilräume auszuschneiden. Eine (längliche) Beweisskizze findet man im Anhang.

**Satz 9** (Ausschneideeigenschaft). *Sind  $Z \subseteq A \subseteq X$  Teilräume mit  $\text{cl}(Z) \subseteq \text{int}(A)$ , so induziert die Inklusion  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen  $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$ .*

**Gute Paare.** Wir wollen nun spezielle Paare betrachten, auf die wir insbesondere die Ausschneideeigenschaft anwenden können. Ein Paar  $(X, A)$  heißt *gut* wenn  $A \neq \emptyset$  ein abgeschlossener Deformationsretrakt einer Umgebung  $V \subseteq X$  ist.

Für gute Paare gilt dann folgende in der Einführung angekündigte Isomorphie der relativen Homologiegruppen und der (reduzierten) Homologiegruppen des Quotientenraums.

**Satz 10.** *Für gute Paare  $(X, A)$  gilt  $\tilde{H}_n(X/A) \cong H_n(X, A)$ .*

*Beweis.* Die lange exakte Sequenz für das Tripel  $(X, V, A)$  ist

$$\dots \longrightarrow \underbrace{H_n(V, A)}_{\cong 0 \text{ nach 4 da } (V, A) \simeq (A, A)} \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, V) \longrightarrow \dots$$

Also  $H_n(X, A) \cong H_n(X, V)$  induziert durch die Identität.

Das selbe Argument lässt sich auf das Tripel  $(X/A, V/A, A/A)$  anwenden, denn  $A/A$  ist auch Deformationsretrakt von  $V/A$ .

Wir erhalten nun das folgende durch Identitäten, Inklusionen und Quotientenabbildungen induzierte kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, V) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ q_* \downarrow & & q_* \downarrow & & q_* \downarrow \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

Nun ist die Quotientenabbildung  $q : (X \setminus A, V \setminus A) \rightarrow (X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A)$  ein Homöomorphismus. Die induzierte Abbildung  $q_*$  rechts ist also auch ein Isomorphismus.

Folglich muss auch  $q_*$  links ein Isomorphismus sein, und es gilt

$$H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A, A/A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X/A, A/A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X/A)$$

□

Wir können nun endlich die Homologiegruppen von  $A$ ,  $X$  und  $X/A$  in Beziehung bringen.

**Korollar 11** (Lange exakte Sequenz mit Homologiegruppen des Quotientenraums). *Jedes gutes Paar  $(X, A)$  induziert funktoriell eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{l_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

#### 4. ANWENDUNGEN

**Sphären und der BROUWERSche Fixpunktsatz.** Wir nutzen die lange exakte Homologiesequenz zunächst, um die Homologiegruppen der Sphären zu berechnen.

**Satz 12** (Homologiegruppen der  $S^m$ ).

$$\tilde{H}_n(S^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , n = m \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis.*  $m = 0$ : Es gilt

$$H_n(S^0) = H_n(\{-1\}) \oplus H_n(\{1\}) = H_n(\{1\})^2$$

und die Behauptung folgt mit Proposition 1 und 2.

$m > 0$ : Das gute Paar  $(D^m, \partial D^m)$  führt auf die lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_n(D^m)}_{\cong 0} \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_n(D^m/\partial D^m)}_{\cong S^m} \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(\partial D^m)}_{\cong S^{m-1}} \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(D^m)}_{\cong 0} \longrightarrow \dots$$

Es gilt also  $\tilde{H}_n(S^m) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1})$  und die Induktionshypothese liefert die Behauptung. □

Damit können wir in zwei Schritten den berühmten Fixpunktsatz von BROUWER beweisen.

**Korollar 13.**  $\partial D^m$  ist kein Retrakt von  $D^m$ .

*Beweis.* Angenommen  $r : D^m \rightarrow \partial D^m$  wäre eine Retraktion, also  $rt = \text{id}_{\partial D^m}$ . Dann müsste die Komposition

$$\tilde{H}_{m-1}(\partial D^m) \xrightarrow{\iota_*} \underbrace{\tilde{H}_{m-1}(D^m)}_{\cong 0} \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{m-1}(\partial D^m)$$

sowohl die Nullabbildung als auch gleich  $\text{id}_{\tilde{H}_{m-1}(\partial D^m)}$  sein. Nach dem vorangehenden Satz gilt allerdings  $\tilde{H}_{m-1}(\partial D^m) \cong \mathbb{Z}$ . Widerspruch.  $\square$

**Korollar 14** (BROUWERSCHER Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $D^m \rightarrow D^m$  hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Eine fixpunktfreie Abbildung  $f : D^m \rightarrow D^m$  führt auf die Retraktion

$$r : \begin{cases} D^m \rightarrow \partial D^m \\ x \mapsto \text{Punkt, an dem der Strahl, der von } f(x) \\ \text{aus und durch } x \text{ geht, die Kugel verlässt} \end{cases}$$

Widerspruch.  $\square$

**Lokale Homologiegruppen.** Wir definieren die *lokalen Homologiegruppen* eines Raums  $X$  in einem Punkt  $x \in X$  via

$$H_n^x(X) := H_n(X, X \setminus \{x\})$$

Exemplarisch berechnen wir zunächst die lokalen Homologiegruppen des  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 15** (Lokale Homologiegruppen des  $\mathbb{R}^m$ ). *Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^m$  gilt  $H_n^x(\mathbb{R}^m) \cong H_{n-1}(S^{m-1})$ .*

*Beweis.* Die lange exakte Sequenz für das Paar  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$

$$\dots \rightarrow \underbrace{H_n(\mathbb{R}^m)}_{\cong 0} \rightarrow H_n^x(\mathbb{R}^m) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \rightarrow \dots$$

liefert

$$H_n^x(\mathbb{R}^m) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(S^{m-1})$$

unter Benutzung von  $\mathbb{R}^m \setminus \{x\} \simeq S^{m-1}$ .  $\square$

Sie kann man benutzen, um lokale Eigenschaften des Raums  $X$  um einen Punkt  $x$  zu untersuchen. Genauer:

**Proposition 16** (Lokalität der lokalen Homologiegruppen). *Sei  $X$  ein  $T_1$ -Raum und  $U \subseteq X$  eine offene Umgebung von  $x \in X$ . Dann gilt:*

$$H_n^x(U) \cong H_n^x(X)$$

*Außerdem induziert jeder Homöomorphismus  $f : U \rightarrow V$  Isomorphismen  $H_n^x(U) \cong H_n^{f(x)}(V)$ .*

*Beweis.* Ausschneideeigenschaft 9 (mit  $A := X \setminus \{x\}$ ,  $Z := X \setminus U$ ) und Funktorialität von  $H_n$ .  $\square$

Unterscheiden sich also die lokalen Homologiegruppen in gewissen Punkten, dann können die Räume dort nicht lokal homöomorph sein. Wir wenden diese Technik im folgenden Beweis an.

**Korollar 17** (BROUWERSche Dimensionsinvarianz). *Sind  $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und homöomorph, dann gilt  $m = n$ .*

*Beweis.* Sei  $f : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus und  $x \in U$ . Mit dem Vorangegangenen gilt:

$$H_{k-1}(S^{m-1}) \stackrel{15}{\cong} H_k^x(\mathbb{R}^m) \stackrel{16}{\cong} H_k^x(U) \stackrel{16}{\cong} H_k^{f(x)}(V) \stackrel{16}{\cong} H_k^{f(x)}(\mathbb{R}^n) \stackrel{15}{\cong} H_{k-1}(S^{n-1})$$

Kenntnis der Homologiegruppen der Sphären (Satz 12) liefert  $n = m$ .  $\square$

## 5. ÄQUIVALENZ SIMPLIZIALER UND SINGULÄRER HOMOLOGIE

**Unterkomplexe.** Ein *Unterkomplex*  $A$  eines  $\Delta$ -Komplexes  $X$  ist ein Teilraum  $A \subseteq X$  mit einer  $\Delta$ -Komplex-Struktur so dass jedes Simplex von  $A$  auch eines von  $X$  ist. Es gilt also  $\Delta(A) \subseteq \Delta(X)$ .

Ein spezieller Unterkomplex ist das *k-Skelett*  $X^k$  bestehend aus den Simplizes von Dimension  $\leq k$ .

Wir nennen einen  $\Delta$ -Komplex  $X$  *endlichdimensional*, wenn keine Simplizes beliebig hoher Dimension auftauchen, d.h. genau dann wenn  $X = X^k$  für  $k$  groß genug.

**Relative simpliziale Homologiegruppen.** Genauso wie in Abschnitt 3 definieren wir den *relativen Kettenkomplex*  $\Delta(X, A) := \Delta(X)/\Delta(A)$ . Die zugehörigen *relativen Homologiegruppen* bezeichnen wir mit  $H_n^\Delta(X, A)$ .

Analog erhält man dann wieder eine zugehörige lange exakte Sequenz von simplizialen Homologiegruppen.

**Äquivalenz.** Da die charakteristischen Abbildungen simplizialer Simplizes singuläre Simplizes sind, erhalten wir eine Kettenkomplexabbildung  $\Delta(X, A) \rightarrow C(X, A)$ . Auf kanonische Weise werden also Homomorphismen  $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  induziert.

**Satz 18** (Äquivalenz simplizialer und singulärer Homologie). *Die kanonischen Homomorphismen  $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  sind Isomorphismen.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir genauere Kenntnis der Homologiegruppen der Standardsimplizes relativ zu ihren Rändern.

**Lemma.**

$$H_n(\Delta^m, \partial\Delta^m) = \begin{cases} \langle [\text{id}_{\Delta^n}] \rangle \cong \mathbb{Z} & , n = m \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis.* (1) *Isomorphie:* Wegen  $(\Delta^m, \partial\Delta^m) \simeq (D^m, \partial D^m)$  und  $D^m/\partial D^m \cong S^m$  ist die  $n$ -te relative Homologiegruppe isomorph zu  $\tilde{H}_n(S^m)$  (Proposition 10), letztere kennen wir schon (Satz 12).

(2) *Erzeuger:* Auf jeden Fall ist  $[\text{id}_{\Delta^n}]$  ein Zykel; die Randabbildung schiebt nämlich die Identität auf eine Summe von  $\pm$  Inklusionen  $\Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  in die Facetten, also auf eine Kette des Randes in  $C_{n-1}(\partial\Delta^n)$ . Wir argumentieren nun induktiv.

$n = 0$ : Wegen

$$C_0(\Delta^0, \underbrace{\partial\Delta^0}_{=\emptyset}) \cong C_0(\Delta^0) = F(\{\text{id}_{\Delta^0}\})$$

ist der Zykel  $[\text{id}_{\Delta^0}]$  Erzeuger von  $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0)$ .

$n > 0$ : Sei  $\Lambda \subseteq \partial\Delta^n$  die Vereinigung aller Facetten von  $\Delta^n$  bis auf eine. Die lange exakte Sequenz des Tripels  $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$

$$\dots \longrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \underbrace{H_n(\Delta^n, \Lambda)}_{\cong 0 \text{ da } (\Delta^n, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)} \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \dots$$

liefert dann einen Isomorphismus  $\partial : H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ .

Andererseits induziert die Inklusion  $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial\Delta^n$  des  $(n-1)$ -Simplex in die Facette, die nicht in  $\Lambda$  enthalten ist, einen Homöomorphismus  $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n/\Lambda$  und damit einen Isomorphismus  $\iota : H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ .

Insgesamt haben wir nun den Isomorphismus  $\iota^{-1}\partial$  erhalten. Per  $\partial$  schickt dieser  $[\text{id}_{\Delta^n}]$  zunächst auf die Äquivalenzklasse einer Summe von  $\pm$  Inklusionen  $\Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  in die Facetten. Relativ zu  $\Lambda$  ist das nichts anderes als  $\pm$  die Äquivalenzklasse der Inklusion in die Facette, die übrig bleibt. Diese ist allerdings gerade das Urbild von  $\pm [\text{id}_{\Delta^{n-1}}]$  unter  $\iota$ . Nach Induktionshypothese ist das ein Erzeuger, also muss auch das Urbild  $[\text{id}_{\Delta^n}]$  ein Erzeuger sein.  $\square$

*Beweis von Satz 18.* Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten.

(1)  $X$  endlichdimensional und  $A = \emptyset$ : Wir zeigen die Behauptung induktiv für alle  $k$ -Skelette.

$k = 0$ : Hier ist die Behauptung klar (die Zusammenhangskomponenten von  $X^0$  sind einzelne Punkte).

$k > 0$ : Die kanonischen Homomorphismen induzieren das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Nach Induktionshypothese sind der zweite und der fünfte vertikale Pfeil Isomorphismen. Wir zeigen jetzt, dass das auch für den ersten und den vierten Pfeil gilt. Das Fünferlemma vollendet dann den Induktionsschritt.

Bezeichnen wir die Menge der  $n$ -Simplizes von  $X$  mit  $\{e_\alpha^n\}$  dann gilt ja bekanntlich

$$\Delta_n(X^k) = \begin{cases} F(\{e_\alpha^n\}) & , n \leq k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

So sieht man, dass  $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$  für  $n = k$  frei abelsch mit Basis  $\{[e_\alpha^k]\}$  und ansonsten trivial ist.

Andererseits ergeben die charakteristischen Abbildungen der  $k$ -Simplizes eine Abbildung  $\coprod_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$ . Sie induziert einen Homöomorphismus  $\coprod_\alpha \Delta_\alpha^k / \coprod_\alpha \partial\Delta_\alpha^k \rightarrow X^k / X^{k-1}$  und es folgt

$$H_n(X^k, X^{k-1}) \stackrel{10}{\cong} H_n\left(\coprod_\alpha \Delta_\alpha^k, \coprod_\alpha \partial\Delta_\alpha^k\right) \cong \bigoplus_\alpha H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$$

Also ist  $H_n(X^k, X^{k-1})$  nach dem Lemma für  $n = k$  frei abelsch mit Basis  $\{[\sigma_\alpha^k]\}$  und ansonsten trivial.

Die kanonischen Homomorphismen schicken definitionsgemäß  $[e_\alpha^k]$  auf  $[\sigma_\alpha^k]$ . Sie sind also Isomorphismen.

(2)  $X$  beliebig und  $A = \emptyset$ : Eine kompakte Menge  $C \subseteq X$  kann nur endlich viele der offenen Simplizes berühren; ansonsten findet man nämlich unendlich viele Punkten

$\{x_i\} \subseteq C$  die in verschiedenen offenen Simplizes liegen, und das ergibt eine offene Überdeckung  $\{X \setminus \bigcup_{i \neq j} \{x_j\}\}$  ohne endliche Teilüberdeckung.

Wir zeigen jetzt Surjektivität und Injektivität der kanonischen Homomorphismen. Man beachte in den folgenden Argumentationen, dass stets  $\Delta_n(X^k) \subseteq \Delta_n(X)$  sowie  $C_n(X^k) \subseteq C_n(X)$  gelten, denn  $X^k$  ist ein Unterkomplex von  $X$ .

*Surjektivität:* Jedes Element  $[y] \in H_n(X)$  wird durch einen singulären Zykel  $y$  dargestellt. Dieser ist Linearkombination endlich vieler singulärer Simplizes, deren Bilder (da jeweils kompakt) in einem  $X^k$  enthalten sind (für  $k$  groß genug). Also liegt  $[y] \in H_n(X^k)$  und wir erhalten nach Schritt (1) ein Urbild  $[x] \in H_n^\Delta(X^k)$  unter dem kanonischen Homomorphismus für das  $k$ -Skelett. Dann ist aber auch  $[x] \in H_n^\Delta(X)$  ein Urbild von  $[y]$ .

*Injektivität:* Ist andererseits  $[x] \in H_n^\Delta(X)$  im Kern, dann wird ja  $x$  auf einen singulären Rand abgebildet, dessen Bilder wiederum in einem  $X^k$  (für  $k$  groß genug) enthalten sind. Also liegt auch  $[x] \in H_n^\Delta(X^k)$  im Kern des kanonischen Homomorphismus für das  $k$ -Skelett. Nach Schritt (1) muss  $x$  ein simplizialer Rand in  $X^k$  sein, und damit auch in  $X$ . Es folgt  $[x] = 0$ .

(3)  $X$  und  $A$  beliebig: Die Behauptung ergibt sich mit Hilfe des Fünferlemmas nun direkt aus dem folgenden kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^\Delta(A) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X) \\ & & \cong \downarrow (2) & & \cong \downarrow (2) & & \downarrow & & \cong \downarrow (2) & & \cong \downarrow (2) \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

□

Direkt aus dem Satz ergibt sich nun die folgende Invarianzeigenschaft der simplizialen Homologie.

**Korollar 19.** *Die simplizialen Homologiegruppen hängen nicht von der auf  $X$  gewählten  $\Delta$ -Komplex-Struktur ab.*

Andererseits lassen sich auch interessante Aussagen auf die singuläre Homologie übertragen. Hat  $X$  beispielsweise nur endlich viele  $n$ -Simplizes, dann ist auch  $H_n(X)$  endlich erzeugt und lässt sich nach dem Struktursatz als direkte Summe zyklischer Gruppen schreiben. Die Anzahl der  $\mathbb{Z}$ -Summanden in dieser Darstellung nennt man die  $n$ -te BETTI-Zahl von  $X$ , die Ordnungen der endlichen zyklischen Summanden heißen *Torsionskoeffizienten*. Früher hat man unter Homologie wohl vor allem diese Zahlen verstanden...

ANHANG A. BEWEIS DER AUSSCHNEIDEEIGENSCHAFT

Der folgende Satz ist zur Ausschneideeigenschaft 9 äquivalent.

**Satz 20.** *Sind  $A, B \subseteq X$  Unterräume mit  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ , so induziert die Inklusion  $(B, B \cap A) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen  $H_n(B, B \cap A) \rightarrow H_n(X, A)$ .*

Wir werden ihn beweisen, indem wir zunächst durch Triangulation zu einem homotopieäquivalenten Kettenkomplex übergehen, dessen Simplizes "klein" bzw. "lokal genug" in folgendem Sinne:

Seien  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  Unterräume von  $X$  so dass  $X$  von deren Inneren überdeckt wird. Dann definieren wir den Unterkettenkomplex  $C^\mathcal{U}(X)$  via

$$C_n^\mathcal{U}(X) := \left\{ \sum n_i \sigma_i : \forall i \exists j \text{ im}(\sigma_j) \subseteq U_j \right\}$$

Die zugehörigen Homologiegruppen bezeichnen wir mit  $H_n^\mathcal{U}(X)$ .

**Proposition 21.**  $C(X) \simeq C^{\mathcal{U}}(X)$ .

*Beweisidee.* (Details siehe [Hat02, S. 119 ff.]) (1)  $n$ -Simplizes lassen sich wie folgt *baryzentrisch unterteilen*: 0-Simplizes werden nicht verändert, und für  $n > 0$  unterteilt man erst die Facetten des  $n$ -Simplex und verbindet sie dann mit dessen Schwerpunkt. So entstehen kleinere  $n$ -Simplizes deren Durchmesser höchstens das  $\frac{n}{n+1}$ -fache des ursprünglichen betragen. Iterativ erhält man also eine Zerlegung in beliebig kleine  $n$ -Simplizes.



ABBILDUNG 1. Baryzentrische Unterteilung für  $n = 1, 2$

Diese Zerlegung lässt sich auch algebraisch formulieren.

(2) Zunächst macht man dies für den Unterkomplex  $LC(Y)$  der *linearen Ketten* einer konvexen Teilmenge  $Y$  eines euklidischen Raums bestehend aus den Untergruppen

$$LC_n(Y) := \langle \sigma \in C_n(Y) : \sigma \text{ linear} \rangle \subseteq C_n(Y)$$

Wir schreiben  $[w_0, \dots, w_n]$  für die (eindeutig bestimmte) lineare Kette  $\sigma \in LC_n(Y)$  mit  $\sigma(v_i) = w_i$ .

Um induktive Argumente zu erleichtern betrachtet man eigentlich zunächst den erweiterten Komplex  $\tilde{L}C(Y)$ ; wir werden in dieser Beweisskizze allerdings diesbezüglich ungenau bleiben. Auf jeden Fall bezeichnen wir den Erzeuger der Gruppe bei  $-1$  als das *leere Simplex*  $[\emptyset]$ .

Über einer gegebenen Kette können wir homomorph einen Kegel mit Spitze  $b \in Y$  aufspannen:

$$b : \tilde{L}C_n(Y) \rightarrow \tilde{L}C_{n+1}(Y), [w_0, \dots, w_n] \mapsto [b, w_0, \dots, w_n];$$

Dann gilt die Relation  $\partial b = \text{id} - b\partial$ ; geometrisch lässt sich das so verstehen, dass der Rand des Kegels sich zusammensetzt aus der Basis und dem Kegel über dem Rand.

Wir sind nun in der Lage, den *Unterteilungsoperator* zu definieren. Das ist die Kettenkomplexabbildung gegeben durch

$$S : \begin{cases} LC_n(Y) & \rightarrow LC_n(Y) \\ [\emptyset] & \mapsto [\emptyset] \\ \sigma & \mapsto b_\sigma(S(\partial\sigma)) \quad \text{für Simplizes } \sigma : \Delta^n \rightarrow Y \end{cases}$$

( $b_\sigma$  bezeichnet dabei das Bild des Schwerpunkts unter  $\sigma$ ). Nun sieht man leicht ein, dass das für "echte"  $n$ -Simplizes  $[w_0, \dots, w_n]$  (also Einbettungen  $\Delta^n \hookrightarrow Y$ ) gerade eine Summe der  $n$ -Simplizes der baryzentrischen Unterteilung (1) von  $[w_0, \dots, w_n]$  (mit entsprechenden Vorzeichen) ergibt.

Jetzt konstruiert man noch eine Kettenhomotopie  $T : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$  zwischen  $S$  und der Identität; darauf gehen wir aber nicht weiter ein.

(3) Wichtig ist nun, dass sich die  $S$  und  $T$  leicht auf *beliebige* Ketten erweitern lassen. Dazu wendet man sie erst auf das Standardsimplex an – das ist die Kette

$\text{id}_{\Delta^n}$  im konvexen Teilraum  $Y := \Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  – und schiebt das Ergebnis dann nach  $C_n(X)$ . Genauer:

$$\begin{aligned} S &: C_n(X) \rightarrow C_n(X), \sigma \mapsto \sigma_{\natural}(S(\text{id}_{\Delta^n})) \\ T &: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X), \sigma \mapsto \sigma_{\natural}(T(\text{id}_{\Delta^n})) \end{aligned}$$

Dieses  $S$  ist dann immer noch eine Kettenkomplexabbildung und  $T$  eine Homotopie zur Identität.

(4) Wir können nun jedes  $n$ -Simplex  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  solange unterteilen, bis die Zerlegung in  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  liegt. Dazu wählen wir einfach eine Lebesguezahl  $\epsilon > 0$  für die offene Überdeckung  $\{\sigma^{-1}(\text{int}(U_i))\}$  des Kompaktums  $\Delta^n$  und iterieren, bis die Durchmesser aller Simplizes diese unterschreiten. Die kleinste Anzahl Iterationen, die dabei nötig ist, bezeichnen wir mit  $m(\sigma) \in \mathbb{N}_0$ .

Über einen Umweg gelangen wir nun zum Erfolg: Zunächst zeigt man, dass  $D_m := \sum_{i=0}^{m-1} TS^i$  eine Homotopie zwischen  $S^m$  und der Identität ist. Setzt man jetzt

$$D : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X), \sigma \mapsto D_{m(\sigma)}(\sigma)$$

so ist das auch eine Homotopie, und zwar wegen

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \rho - \underbrace{(S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma))}_{=: \rho(\sigma)}$$

definitionsgemäß eine zwischen  $\rho$  und der Identität. Jetzt rechnet man noch nach, dass  $\rho$  tatsächlich eine Kettenkomplexabbildung  $C(X) \rightarrow C^{\mathcal{U}}(X)$  ist. Da die folgenden Relationen gelten, ist die Proposition bewiesen.

$$(1) \quad \begin{cases} \partial D + D\partial = \text{id} - \iota\rho \\ \rho\iota = \text{id} \end{cases}$$

(dabei bezeichnet  $\iota$  die Inklusion  $C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$ ). □

*Beweis von Satz 20.* Wir betrachten die Überdeckung  $\mathcal{U} := \{A, B\}$ . In Relation (1) gehen wir zum Quotienten über (alle Abbildungen schicken Ketten in  $A$  auf Ketten in  $A$ ) und erkennen, dass  $C^{\mathcal{U}}(X)/C(A) \simeq C(X)/C(A)$  induziert durch die Inklusion  $C^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C(X)$ .

Andererseits gilt sogar  $C(B)/C(B \cap A) \simeq C^{\mathcal{U}}(X)/C(A)$  induziert durch die Inklusion  $B \hookrightarrow X$ . Es folgt die Behauptung. □

#### LITERATUR

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.