Die Pontryagin-Dualität*

Michael Walter

1 Einführung

1 Erinnerung. Es bezeichnen LCA, CA, DA die Kategorien der *lokal-kompakten*, *kompakten* bzw. *diskreten abelschen topologischen Gruppen.*

Die *duale Gruppe* einer Gruppe $A \in \mathrm{LCA}$ ist gegeben durch

$$A^* := \{\alpha : A \to \mathbb{T} : \alpha \text{ linear, stetig}\},$$

ihre Elemente heißen *Charaktere*. Wir erhalten damit Funktoren *, ** : LCA $\to$ LCA.

2 Erinnerung. Die Homomorphismen

$$\epsilon_A : A \to A^{**}, \ a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$$

definieren eine *natürliche Transformation* $\epsilon := \{\epsilon_A\}_{A \in \mathrm{LCA}}$ vom Identitätsfunktor zu **. Das heißt, dass für je zwei Objekte A, $B \in \mathrm{LCA}$ und einen Morphismus $f : A \to B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, "f"'] & A^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ B \arrow[r, "\epsilon_B"] & B^{**} \end{tikzcd}$$

Unser Ziel ist es nun, den folgenden Satz zu beweisen:

3 Satz (Pontryagin-Dualität, PD)**.** *Für jedes $A \in \mathrm{LCA}$ ist ϵ_A ein Isomorphismus.*

Etwas eleganter formuliert ist also ϵ ein natürlicher Isomorphismus.

4 Erinnerung. Aus Natascha Kaspers Vortrag wissen wir schon, dass die ϵ_A monisch sind.

5 Idee. Wir können jede lokal-kompakten Gruppe $A \in \mathrm{LCA}$ als Erweiterung

$$0 \longrightarrow \langle K \rangle \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\langle K \rangle \longrightarrow 0$$

einer diskreten Gruppe über eine kompakt erzeugte Untergruppe $\langle K \rangle$ schreiben.

Letztere lässt sich wiederum als Erweiterung

$$0 \longrightarrow L \hookrightarrow \langle K \rangle \twoheadrightarrow \langle K \rangle / L \longrightarrow 0$$

einer Gruppe vom speziellen Typ CGAL (dazu gleich mehr) über eine kompakte Gruppe L darstellen.

Wir werden sehen, dass sich die Pontryagian-Dualitäts über diese Erweiterungen "hochheben" lässt; daher wollen wir sie zunächst für Gruppen in CGAL und diskrete Gruppen beweisen, um dann auf kompakte, kompakt erzeugte und schließlich allgemeine lokal-kompakte Gruppen zu schließen.

2 CGAL

6 Definition. Wir betrachten die volle Unterkategorie

$$\begin{aligned} \mathrm{CGAL} := \{A \in \mathrm{LCA} \mid A \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^b \times \mathbb{Z}^c \times F \text{ für} \\ \text{gewisse } a, b, c \in \mathbb{N}_0, \ F \text{ endlich, diskret, abelsch}\} \end{aligned}$$

der *kompakt-erzeugten abelschen Lie-Gruppen* (das ist tatsächlich so).

*Nach Stroppel [1], Kapitel 21-22

CGAL besteht also gerade aus Gruppen, die isomorph zu endlichen Produkten der *elementaren Gruppen* $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) sind. Wir berechnen nun explizit deren Duale.

7 Lemma. *Die folgenden Abbildungen sind Isomorphismen:*

(a) $\eta_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*,\ r \mapsto (s \mapsto rs + \mathbb{Z})$

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst

$$\mathbb{R}^* = \{s \mapsto rs + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\}$$

und damit Wohldefiniertheit und Surjektivität von $\eta_{\mathbb{R}^*}$.

Nur die Inklusion $\subseteq$ ist interessant. Betrachte als einen Charakter $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^*$. Es ist $\alpha(\mathbb{R}) \leq \mathbb{T}$ eine nichttriviale zusammenhängende Untergruppe von $\mathbb{T}$. Das Bild enthält also ein Intervall und damit ganz $\mathbb{T}$, d.h. α ist surjektiv!

Der Kern von α ist eine abgeschlossene Untergruppe, wegen $\frac{1}{2}+\mathbb{Z} \in \operatorname{im}(\alpha)$ ist er nichttrivial. Nach Proposition 21.4 existiert dann ein $0 \neq w \in \mathbb{R}$ mit $\ker(\alpha) = \mathbb{Z}w$. Es gilt

$$\alpha(\frac{w}{2}) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \alpha(\frac{-w}{2})$$

und (nach evtl. Ersetzen von w durch $-w$)

$$\alpha(\frac{w}{4}) = \frac{1}{4} + \mathbb{Z}$$

Damit gilt

$$\alpha(\frac{w}{8}) \in \{\frac{1}{8} + \mathbb{Z}, \frac{5}{8} + \mathbb{Z}\}$$

Nun liegt $\alpha(\frac{w}{8}) \subseteq \alpha((0, \frac{w}{2}))$ in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{T} - \{\mathbb{Z}, \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}$, die $\frac{1}{4} + \mathbb{Z}$ enthält. Es gilt also

$$\alpha(\frac{w}{8}) = \frac{1}{8} + \mathbb{Z}$$

Induktiv erhalten wir

$$\alpha(\frac{w}{2^n}) = \frac{1}{2^n} + \mathbb{Z} = \frac{1}{w}\frac{w}{2^n} + \mathbb{Z} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Somit stimmen α und $s \mapsto \frac{1}{w}s + \mathbb{Z}$ auf einer dichten Untergruppe überein und sind also identisch.

(2) Sicherlich ist $\eta_{\mathbb{R}^*}$ ein Homomorphismus. Wegen

$$\eta_{\mathbb{R}^*}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad rs \in \mathbb{Z}\ \forall s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad r = 0$$

ist er auch injektiv.

(3) Wir zeigen nun Stetigkeit in 0. Dazu betrachten wir $\lfloor C, D_\epsilon \rfloor$ mit kompaktem $C \subseteq \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wähle $K > 0$ mit $C \subseteq [-K, K]$; dann gilt

$$\eta_{\mathbb{R}^*}((-\epsilon/K, \epsilon/K)) \subseteq \lfloor C, D_\epsilon \rfloor$$

Folglich ist $\eta_{\mathbb{R}^*}$ stetig und nach dem Open Mapping Theorem (6.19) auch offen, also ein Isomorphismus. □

7 Lemma. ...

(b) $\eta_{\mathbb{T}^*} : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}^*,\ n \mapsto (t \mapsto nt)$

(c) $\eta_{\mathbb{Z}^*} : \mathbb{T} \to \mathbb{Z}^*,\ t \mapsto (n \mapsto nt)$

(d) $\eta_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ k + n\mathbb{Z} \mapsto (l + n\mathbb{Z} \mapsto \frac{kl}{n} + \mathbb{Z})$

Beweisidee. (b) Lifte Charaktere von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{R}$ und wende Teil (a) an. Beachte außerdem, dass der Dual einer kompakten Gruppe diskret ist.

(c), (d) Charaktere zyklischer Gruppen sind bereits durch das Bild eines Erzeugers definiert! □

8 Lemma. *Die Pontryagin-Dualität gilt für* $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir beweisen dies exemplarisch für $\mathbb{R}$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\eta_{\mathbb{R}^*}"] \arrow[rr, bend right, "\epsilon_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R}^* \arrow[r, "(\eta^*_{\mathbb{R}^*})^{-1}"] & \mathbb{R}^{**} \end{tikzcd}$$

kommutiert, denn es gilt

$$\begin{aligned} & (\eta^*_{\mathbb{R}^*})^{-1} \circ \eta_{\mathbb{R}^*} = \epsilon_{\mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow \ & \eta_{\mathbb{R}^*} = \eta^*_{\mathbb{R}^*} \circ \epsilon_{\mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow \ & \eta_{\mathbb{R}^*}(r)(s) = (\eta^*_{\mathbb{R}^*} \circ \epsilon_{\mathbb{R}})(r)(s) \\ \Leftrightarrow \ & \eta_{\mathbb{R}^*}(r)(s) = (\langle r, \cdot \rangle \circ \eta_{\mathbb{R}^*})(s) \\ \Leftrightarrow \ & rs + \mathbb{Z} = sr + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(jeweils für alle r, $s \in \mathbb{R}$). Wegen Lemma 7 ist damit auch $\epsilon_{\mathbb{R}}$ ein Isomorphismus. □

9 Theorem. *Die Pontryagin-Dualität gilt in* CGAL.

Beweis. Jede endliche abelsche Gruppe lässt sich als Produkt endlich vieler zyklischer Gruppen schreiben. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 8 und der Tatsache, dass * mit endlichen Produkten vertauscht. □

Das folgende Theorem zeigt, dass jede *kompakt erzeugte* lokal-kompakte Gruppe Erweiterung einer kompakt erzeugten Lie-Gruppe über eine Untergruppe ist, welche wir im wesentlichen kontrollieren können.

10 Theorem (LCA und CGAL)**.** *Sei $A \in$ LCA kompakt erzeugt und $U \subseteq A$ eine Umgebung der 0. Dann existiert eine Untergruppe $K \leq A$ mit $K \subseteq U$ und $A/K \in$ CGAL.*

Der Beweis hiervon ist recht technisch und benötigt einiges an Vorbereitung; der interessierte Leser sei deshalb an Stroppel [1] (Theorem 21.16) verwiesen.

3 DA

In diesem Abschnitt sei $A \in$ DA, also eine diskrete abelsche Gruppe.

11 Bemerkung. A ist direkter Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen; diese liegen in CGAL!

Genauer gesagt haben wir auf der gerichteten Menge $(I, \subseteq)$ mit

$$I := \{U \leq A : U \text{ endlich erzeugt}\} \subseteq \text{CGAL}$$

das gerichtete System D, das darauf durch die Inklusionen $i_{U,V} : U \longrightarrow V$ gegeben ist.

Man sieht leicht, dass $A = \varinjlim D$ mit den Inklusionen $i_U : U \longrightarrow A$, d.h. A erfüllt die folgende universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} A = \varinjlim D \arrow[dd, dotted, "\exists_1 \varphi"'] & & \\ & & \cdots \\ & U \arrow[uul, "i_U"'] \arrow[ddl, "\varphi_U"] \arrow[r, "i_{U,V}"] & \cdots \\ & & \cdots \\ G & & \end{tikzcd}$$

12 Bemerkung. Wir nennen das projektive System P auf den dualen Gruppen

$$J := \{U^* : U \in I\} \subseteq \text{CGAL}$$

gegeben durch die Restriktionen $i^*_{U,V} : V^* \longrightarrow U^*, \alpha \mapsto \alpha|_U$ das zugehörige *duale System*.

Nach Joachim Breitners Vortrag existiert der projektive Limes $\varprojlim P$ (mit zug. Morphismen $\pi_{U^*} : \varprojlim P \to U^*$). Dessen universelle Eigenschaft ist gegeben durch

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim P \arrow[dr, "\pi_{U^*}"] & \dots & \\
& U^* & \dots \arrow[l, "i^*_{U,V}"'] \\
G \arrow[uu, dotted, "\exists_1 \psi"] \arrow[ur, "\psi_{U^*}"] & \dots &
\end{tikzcd}
$$

Wir können diese nun auf A^* und die $i_U^* : A^* \to U^*$ anwenden; das liefert einen Morphismus

$$\psi : A^* \longrightarrow \varprojlim P \quad \text{mit} \quad \pi_{U^*} \circ \psi = i_U^*$$

13 Proposition. *ψ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (1) ψ ist monisch, denn:

$$
\begin{aligned}
& 0 = \psi(\alpha) \\
\Rightarrow \quad & 0 = \pi_{U^*}(\psi(\alpha)) = i_U^*(\alpha) = \alpha|_U
\end{aligned}
$$

(2) ψ ist auch episch: Da A diskret ist gilt für jedes $U \in I$

$$
\begin{aligned}
& i_U : U \hookrightarrow A \\
\Rightarrow \quad & i_U^* : A^* \longrightarrow U^* \\
\Rightarrow \quad & \psi : A^* \twoheadrightarrow \varprojlim P
\end{aligned}
$$

(wobei der letzte Schluss mit einem Satz aus Joachim Breitners Vortrag folgt; da ging es gerade um proj. Limiten von solchen Quotienten!)

Nun ist A^* kompakt und $\varprojlim P$ Hausdorff'sch, somit ist ψ monische Quotientenabbildung, d.h. Isomorphismus! $\square$

Also ist A^* mit den i_U^* gerade der projektive Limes des dualen Systems!

Die i_U sind offene Einbettungen, also ist i_U^* Quotientenabbildung und i_U^{**} monisch. Da die Pontryagian-Dualität in CGAL gilt, erhalten wir also monische Abbildungen

$$i_U^{**} \circ \epsilon_U : U \rightarrowtail A^{**}$$

Wir nutzen die universelle Eigenschaft des direkten Limes A:

$$
\begin{tikzcd}
A = \varinjlim D \arrow[dd, dotted, "\exists_1 \varphi"'] & \dots & \\
& U \arrow[ul, "i_U"'] \arrow[r, "i_{U,V}"] \arrow[dl, "i_U^{**} \circ \epsilon_U"] & \dots \\
A^{**} & \dots &
\end{tikzcd}
$$

und erhalten einen Morphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A^{**} \quad \text{mit} \quad \varphi \circ i_U = i_U^{**} \circ \epsilon_U$$

14 Proposition. *φ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (1) φ ist injektiv: Denn sei $a \in \ker(\varphi)$. Dann ist $U := \langle a \rangle \in I$ und

$$
\begin{aligned}
& 0 = \varphi(a) = \varphi(i_U(a)) = (i_U^{**} \circ \epsilon_U)(a) \\
\Rightarrow \quad & a = 0
\end{aligned}
$$

denn die rechte Abbildung war ja monisch!

(2) φ ist surjektiv: Um dies einzusehen wählen wir zunächst eine Umgebung W der 0 in $\mathbb{T}$, welche nur die triviale Untergruppe enthält, sowie ein $\alpha \in A^{**}$.

A ist lokalkompakt, also finden wir eine kompakte Umgebung K der 0 mit

$$K \subseteq \alpha^{-1}(W)$$

und nach Joachim Breitners Vortrag ("die Kerne der Morphismen des projektiven Limes A^* werden beliebig fein") ein $U \in I$ mit

$$\ker(i_U^*) \subseteq K$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \alpha(\ker(i_U^*)) \leq \mathbb{T} \quad \text{und} \quad \alpha(\ker(i_U^*)) \subseteq W \\ \Rightarrow \; & \alpha(\ker(i_U^*)) = 0 \\ \Rightarrow \; & \ker(i_U^*) \leq \ker(\alpha) \end{aligned}$$

und α faktorisiert über i_U^*, d.h.

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "i_U^*"] \arrow[d, "\alpha"'] & U^* \arrow[dl, dotted, "\exists_1 \beta"'] \\ \mathbb{T} & \end{tikzcd}$$

für ein $\beta \in U^{**}$. Wegen der Pontryagin-Dualität in CGAL finden wir ein Urbild $u \in U$ unter ϵ_U, d.h.

$$\begin{aligned} & \beta = \epsilon_U(u) \\ \Rightarrow \; & \alpha = \beta \circ i_U^* = i_U^{**}(\beta) = i_U^{**}(\epsilon_U(u)) = \varphi(i_U(u)) \in \operatorname{im}(\varphi) \end{aligned}$$

Weil A und A^{**} diskret sind ist φ Isomorphismus. □

15 Theorem. *Die Pontryagin-Dualität gilt in* DA.

Beweis. Wir zeigen, dass ϵ_A und φ die gleichen Abbildungen sind!

Sei $a \in A$. Dann ist $U := \langle a \rangle \in I$ und wir erhalten

$$\varphi(a) = \varphi(i_U(a)) = i_U^{**}(\epsilon_U(a)) = \epsilon_U(a) \circ i_U^*$$

Für jedes $\alpha \in A^*$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \varphi(a)(\alpha) = \epsilon_U(a)(i_U^*(\alpha)) = \epsilon_U(a)(\alpha|_U) \\ = \; & \alpha|_U(a) = \alpha(a) = \epsilon_A(a)(\alpha) \\ \Rightarrow \; & \varphi = \epsilon_A \end{aligned}$$

□

4 LCA

16 Lemma. *Für* $A \in \text{LCA}$ *gilt:*

$$\epsilon_A^* \circ \epsilon_{A^*} = \mathrm{id}_{A^*}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & (\epsilon_A^* \circ \epsilon_{A^*})(\alpha)(a) = (\epsilon_{A^*}(\alpha) \circ \epsilon_A)(a) = \epsilon_{A^*}(\alpha)(\langle a, \cdot \rangle) \\ = \; & \langle \alpha, \cdot \rangle (\langle a, \cdot \rangle) = \langle a, \alpha \rangle = \alpha(a) \end{aligned}$$

□

17 Proposition. *Die Pontryagin-Dualität gilt in* CA.

Beweis. Sei A kompakt, also A^* diskret und nach Satz 15 ist ϵ_{A^*} Isomorphismus. Das Lemma zeigt dann, dass auch ϵ_A^* Isomorphimus ist.

Somit ist ϵ_A monisch und episch von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum, also monische Quotientenabbildung, also Isomorphismus. □

18 Proposition. *Die Pontryagin-Dualität gilt für kompakt erzeugte Gruppen in* LCA.

Beweis. Sei $A \in \mathrm{LCA}$ und K eine kompakte Umgebung der 0. Nach Satz 10 existiert eine Untergruppe $L \leq A$ mit

$$L \subseteq K \quad \text{und} \quad A/L \in \mathrm{CGAL}$$

A/L ist insbesondere Hausdorff'sch, also ist L als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums wieder kompakt.

Damit ist A Erweiterung einer Gruppe aus CGAL über ein Kompaktum

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, "q"] & A/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(wie zu Beginn angekündigt) und wir erhalten folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\epsilon_L", "\cong"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\epsilon_A"'] & A/L \arrow[d, "\epsilon_{A/L}"', "\cong"] \\ L^{**} \arrow[r, "i^{**}"] & A^{**} \arrow[r, "q^{**}"] & (A/L)^{**} \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun die letzte Bemerkung in Natascha Kaspers Vortrag anwenden. Wir bemerken dazu, dass

$$\begin{aligned} & q : A \longrightarrow A/L \\ \Rightarrow \ & q^* : (A/L)^* \hookrightarrow A^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & i^{**} = \epsilon_A \circ i \circ \epsilon_L^{-1} : L^{**} \rightarrowtail A^{**} \\ \Rightarrow \ & i^* : A^* \twoheadrightarrow L^* \end{aligned}$$

L^* ist diskret, damit ist i^* sogar surjektiv und offen, d.h. eine Quotientenabbildung. Wir haben also folgende exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 & L^* \arrow[l] & A^* \arrow[l, "i^*"'] & (A/L)^* \arrow[l, hook', "q^*"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

und besagte Bemerkung liefert die Exaktheit von

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^{**} \arrow[r, hook, "i^{**}"] & A^{**} \arrow[r, "q^{**}"] & (A/L)^{**} \end{tikzcd}$$

Aus dem kommutativen Diagramm oben erkennt man noch:

$$\begin{aligned} & q^{**}(\epsilon_A(A)) = \epsilon_{A/L}(q(A)) = (A/L)^{**} \\ \Rightarrow \ & A^{**} = q^{**-1}(q^{**}(\epsilon_A(A)) = \epsilon_A(A) + \ker(q^{**}) \\ & \quad = \epsilon_A(A) + \mathrm{im}(i^{**}) = \epsilon_A(A) + i^{**}(\epsilon_L(L)) \\ & \quad = \epsilon_A(A) + \epsilon_A(i(L)) = \epsilon_A(A) \end{aligned}$$

Also ist ϵ_A surjektiv.

Als kompakt erzeugte Gruppe ist A insbesondere σ-kompakt, und das Open Mapping Theorem liefert die Offenheit der surjektiven, stetigen Abbildung ϵ_A. Als monische Abbildung ist sie somit sogar Isomorphismus. □

19 Theorem. *Die Pontryagin-Dualität gilt in* LCA.

Beweis. Sei $A \in \mathrm{LCA}$. Wähle eine kompakte Umgebung K der 0. Dann ist $\langle K \rangle$ kompakt erzeugt und offen, somit $A/\langle K \rangle$ diskret und wir haben die Erweiterung

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \langle K \rangle \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, "q"] & A/\langle K \rangle \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wir wenden zweimal die Bemerkung aus Natascha Kaspers Vortrag an und erhalten die exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 & \langle K \rangle^* \arrow[l] & A^* \arrow[l, "i^*"'] & (A/\langle K \rangle)^* \arrow[l, hook', "q^*"'] & 0 \arrow[l] \\ 0 \arrow[r] & \langle K \rangle^{**} \arrow[r, hook, "i^{**}"] & A^{**} \arrow[r, "q^{**}"] & (A/\langle K \rangle)^{**} \end{tikzcd}$$

Genauso wie im Beweis des vorhergenden Satzes finden wir, dass ϵ_A surjektiv ist.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass ϵ_A offen ist. Die $\{0\}$ ist offen in der diskreten Gruppe $(A/\langle K \rangle)^{**}$, damit auch $\ker(q^{**}) = \mathrm{im}(i^{**})$. Folglich ist i^{**} offen (als Einbettung; denn der Schnitt zweier offener Mengen ist wieder offen).

Nun ist aber $i^{**} \circ \epsilon_{\langle K \rangle} = \epsilon_A \circ i$ offen, d.h. auch $\epsilon_A|_{\langle K \rangle}$. Da wir jedes Element in die offene Menge $\langle K \rangle$ verschieben können folgt damit die Offenheit von ϵ_A. □

Literatur

[1] M. Stroppel. *Locally Compact Groups.* EMS, 2006.