Irreduzible Darstellungen*

Michael Walter

Es bezeichnet + (bzw. $\oplus$) stets die (direkte) Summe im Vektorraumsinne, und 0 den trivialen Vektorraum/Modul/Algebra (wo passend).

Erinnerungen

Bemerkung. Jede Darstellung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ macht V zu einem L-Modul, und jedes L-Modul induziert eine Darstellung

Die beiden Konzepte sind also äquivalent.

Satz (Weyl)**.** *Sei L eine* halbeinfache *Lie-Algebra. Dann ist jeder endlichdim. L-Modul V* vollständig reduzierbar*, d.h.*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

für irreduzible *(endlichdim.) L-Untermoduln V_i.*

Wir müssen also nur letztere verstehen!

Definition. Eine (Unter-)Algebra $0 \neq H$ heißt *toral*, falls ihre Elemente halbeinfach (diagonalisierbar) sind.

Bemerkung. Ist L halbeinfach, so sind die Cartan-Unteralgebren genau die maximal toralen.

Bemerkung. Torale Unteralgebren sind insbesondere abelsch.

Also ist $\mathrm{ad}_L(H)$ eine Menge kommutierender halbeinfacher Endomorphismen und (für endlich-dim. L) nach Kapitel 8 gemeinsam diagonalisierbar ist, d.h.

$$L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$$
$$\text{mit} \quad L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \ \forall h \in H\}$$

Wir nennen

$$\Phi = \{\alpha \in H^* \mid \alpha \neq 0, L_\alpha \neq 0\}$$

Wurzelsystem (von L bzgl. H), die Elemente *Wurzeln*, die zugehörigen L_α *Wurzelräume*, und wegen $L_0 = H$ erhalten wir die *Wurzelraumzerlegung*

$$L = H + \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

Im Folgenden sei L eine *endlich-dim. halbeinfache* Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik 0, H eine Cartan-Unteralgebra (CSA) und Φ das zugehörige Wurzelsystem mit Basis $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ und Weylgruppe $\mathfrak{W}$.

Damit haben wir obige Wurzelraumzerlegung.

20 Wurzeln & Höchstgewichte

20.1 Gewichtsräume

Wir wollen eine analoge Zerlegung für Darstellungen von L finden.

Sei also V ein *endlich-dim.* L-Modul mit zugehöriger Darstellung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Die Elemente von $\phi(H)$ sind auch halbeinfach (Korollar 6.4) und kommutieren, also operiert H diagonal auf V und wir erhalten die sog. *Gewichtsraumzerlegung*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$$
$$\text{mit} \quad V_\lambda = \{v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \ \forall h \in H\}$$

Wir nennen die Elemente in

$$\Pi(V) := \{\lambda \in H^* \mid V_\lambda \neq 0\}$$

Gewichte (von H auf V) und die zugehörigen V_λ *Gewichtsräume.*

Beispiele. (1) Betrachtet man L selbst als L-Modul (mit $x.v := [x,v]$ bzw. $\phi := \mathrm{ad}_L$), so sind die Gewichte gerade die Wurzeln *sowie 0*, und es gilt $V_\alpha = L_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$.

Es ergibt sich also die Wurzelraumzerlegung als ein Spezialfall der Gewichtsraumzerlegung.

(2) In Kapitel 7 wurden die Darstellungen von $L = \mathfrak{sl}(2,F)$ untersucht, und $H = \langle h \rangle$ war eindimensional.

Aber damit sind alle Gewichte λ schon durch die Skalare $\lambda(h)$ bestimmt, und das sind gerade die "Gewichte" λ aus Kapitel 7!

Lemma. *Sei V ein beliebiger L-Modul. Dann gilt:*

(a) $V' := \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ *ist Untermodul von V*

(b) $\dim(V) < \infty \Rightarrow V' = V$

(c) $L_\alpha.V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ *(für alle $\alpha \in \Phi$, $\lambda \in H^*$)*

*Nach [1], Kapitel 20-21

Beweis. (c) Sei $x \in L_\alpha$, $v \in V_\lambda$. Dann gilt für alle $h \in H^*$:

$$\begin{aligned} h.(x.v) &= (h.x).v = (x.h).v + [h,x].v \\ &= x.(h.v) + [h,x].v = x.\lambda(h)v + \alpha(h)x.v \\ &= (\lambda+\alpha)(h)(x.v) \end{aligned}$$

Damit liegt $x.v$ in $V_{\lambda+\alpha}$.

(a), (b) siehe oben; es ist klar, dass die Summe auch für $\dim V = \infty$ direkt ist, und V' ist in jedem Untermodul wegen (c) □

20.2 Zyklische Standardmoduln

Sei V wieder ein beliebiger L-Modul.

Definition. Ein Vektor $0 \neq v^+ \in V_\lambda$ heißt *Höchstgewichtsvektor* (oder *maximaler Vektor*) zum *Höchstgewicht* λ, falls

$$L_\alpha.v^+ = 0 \quad \forall \alpha \succ 0$$

Äquivalent dazu kann man fordern, dass dies für alle $\alpha \in \Delta$ gilt. Man beachte, dass der Begriff von der gewählten Basis abhängt!

Beispiele. (1) Betrachtet man wieder L selbst als L-Modul, und ist L einfach sowie β eine maximale Wurzel in Φ bzgl. Δ (vergleiche Lemma 10.4A), dann ist jedes $0 \neq v^+ \in L_\beta$ maximaler Vektor!

Die Begriffe passen in diesem Spezialfall also zusammen.

(2) Ist $\dim(V) < \infty$, so existiert immerhin mindestens ein Höchstgewichtsvektor.

Denn nach Kapitel 16 ist

$$B := B(\Delta) := H + \bigoplus_{\alpha \succ 0} L_\alpha$$

eine sog. *Borel-Unteralgebra*, d.h. maximal auflösbar, also ist auch $\phi(B) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ auflösbar und nach dem Satz von Lie 4.1A existiert ein gemeinsamer Eigenvektor v^+.

Und nun folgt aus Lemma 20.1, dass dieser einerseits in *irgendeinem* V_λ liegen muss, andererseits aber

$$L_\alpha v^+ \subseteq V_\lambda \cap V_{\alpha+\lambda} = 0 \quad \forall \alpha \succ 0$$

erfüllt und damit Höchstgewichtsvektor ist.

Andererseits ist auch klar, dass jeder Höchstgewichtsvektor gemeinsamer Eigenvektor von B ist!

Anstatt uns sofort den irreduziblen L-Moduln zuzuwenden, untersuchen wir zunächst die (wie sich herausstellen wird) größere Klasse der von Höchstgewichtsvektoren erzeugten Moduln:

Definition. Wird V von einem Höchstgewichtsvektor v^+ erzeugt, also

$$V = \mathfrak{U}(L).v^+$$

so heißt V *zyklischer Standardmodul.*

Diese Schreibweise macht Sinn, denn die UAE der universellen einhüllenden Algebra induziert eine $\mathfrak{U}(L)$-Modul-Struktur auf V.

Nun erlaubt uns Proposition 8.3 (f), zu jeder Wurzel $\alpha \succ 0$ Elemente $x_\alpha \in L_\alpha$ und $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ zu wählen, so dass

$$\langle x_\alpha, y_\alpha, [x_\alpha, y_\alpha] \rangle \cong \mathfrak{sl}(2,F)$$

Satz. *Sei V zyklischer Standardmodul zum Höchstgewichtsvektor $v^+ \in V_\lambda$ und $\Phi^+ = \{\alpha \mid \alpha \succ 0\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Dann gilt:*

(a) $V = \left\langle \{ y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v^+ \mid i_j \in \mathbb{N}_0 \} \right\rangle$, insbesondere ist V (direkte) Summe der Gewichtsräume (obwohl V a priori *nicht als endlichdimensional vorausgesetzt wurde)*

(b) Jedes Gewicht $\mu \in \Pi(V)$ ist von der Form

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \quad (k_i \in \mathbb{N}_0),$$

insbesondere gilt $\mu \prec \lambda$ (was die Bezeichnung Höchstgewicht *für λ rechtfertigt)*

(c) Alle Gewichtsräume sind endlichdimensional, es gilt sogar $\dim(V_\lambda) = 1$

(d) Kein echter Untermodul von V hat einen komplementären Modul, und es gibt genau einen maximalen echten Untermodul

(e) Nichttriviale homomorphe Bilder von V sind wieder zyklische Standardmoduln zum selben Höchstgewicht

Beweis. (a) Die Wurzelraumzerlegung liefert

$$L = N^- \oplus B$$
$$\text{mit} \quad N^- := \bigoplus_{\alpha \prec 0} L_\alpha$$

Aus den Korollaren C, D zum Satz von PBW 17.3 sieht man die zweite Gleichheit in

$$V = \mathfrak{U}(L).v^+ = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B).v^+ = \mathfrak{U}(N^-).Fv^+$$

und die letzte gilt, da $\mathfrak{U}(B)$ von B und der 1 erzeugt wird, und damit v^+ sogar gemeinsamer Eigenvektor von $\mathfrak{U}(B)$ ist!

Aus Korollar C folgt dann sofort die Behauptung, für das "insbesondere" beachte man Lemma 20.1 (c).

(b) Das selbe Lemma zeigt auch, dass das Gewicht eines Basisvektors

$$y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v^+ \qquad (*)$$

gerade $\lambda - \sum_{j=1}^m i_j \beta_j$ ist. Man stellt nun einfach die (positiven!) Wurzeln als (nichtnegative) Linearkombination von Basiselementen dar.

(c) An (a) sieht man, dass der Gewichtsraum V_μ zum Gewicht $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ gerade von den Vektoren (*) mit

$$\sum_{j=1}^{m} i_j\beta_j = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$$

aufgespannt werden. Aber davon gibt es nur endlich viele, denn die Koeffizienten sind nichtnegativ.

Insbesondere ist der einzige Basisvektor zu $\mu = \lambda$ gerade v^+.

(d) Annahme: $V = X \oplus Y$ für zwei Untermoduln X, Y. Zerlege dann genauso $v^+ = x + y$ (solche Zerlegungen sind eindeutig!) Es gelten:

- $\forall h \in H: \quad h.x + h.y = \lambda(h)x + \lambda(h)y$
  $\Rightarrow h.x = \lambda(h)x,\ h.y = \lambda(h)y$
- $\forall \alpha \succ 0,\ x \in L_\alpha: \quad 0 = l.x + l.y$
  $\Rightarrow l.x = l.y = 0$
- $x \neq 0$ oder $y \neq 0$

Damit ist auch einer der beiden Vektoren Höchstgewichtsvektor zum Gewicht λ, z.B. x. Aus (c) folgt dann $v^+ \in X$, also $X = V$, $Y = 0$. Daran sieht man die erste Behauptung.

Genauso sieht man, dass v^+ nicht in der Summe echter L-Untermoduln liegen kann. Damit ist aber die Summe aller echten L-Untermoduln wieder echt, und nach Konstruktion maximal als solcher.

(e) ergibt sich direkt aus der Definition eines Modulhomomorphismus. □

Korollar. *Sei V irreduzibler zyklischer Standardmodul zum Höchstgewichtsvektor $v^+ \in V_\lambda$. Dann gibt es außer skalaren Vielfachen von v^+ keine weiteren Höchstgewichtsvektoren in V.*

Beweis. Ist $w^+ \in V_\mu$ ein Höchstgewichtsvektor, dann folgt aus der Irreduzibilität von V dass $L.w^+ = V$.

Also können wir den Satz sowohl auf v^+ als auch auf w^+ anwenden, erhalten aus (b) zunächst dass $\lambda = \mu$ und dann mit (c) die Behauptung. □

20.3 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass eine Bijektion

$$H^* \xrightarrow{V} \text{Isomorphieklassen \textit{irreduzibler} zykl. (L-)Standardmoduln}$$

existiert.

Satz A (Eindeutigkeit)**.** *Seien V, W irreduzible zyklische Standardmoduln zum Höchstgewicht λ bzw. μ. Dann gilt:*

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu$$

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt aus Satz 20.2 (e), (b).

($\Leftarrow$) Es seien $v^+ \in V$, $w^+ \in W$ die jeweiligen Höchstgewichtsvektoren.

Dann ist $Z := \mathfrak{U}(L).(v^+, w^+)$ zyklischer Standardmodul zum Höchstgewichtvektor (v^+, w^+) und Höchstgewicht λ!

Wir betrachten die Projektion $\pi : Z \to V$. Sie ist ein nichttrivialer L-Modulhomomorphismus und damit surjektiv (V irreduzibel). Weiter:

$$\ker(\pi) = 0 \times W \cap Z \in \{0, 0 \times W\}$$

denn $0 \times W \cong W$ ist irreduzibel.

Aber wäre $(0, w^+) \in Z$ Höchstgewichtvektor zum Höchstgewicht λ, und nach Satz 20.2 (c) Vielfaches von (v^+, w^+). Widerspruch.

Also $\ker(\pi) = 0$, d.h. π ist injektiv und damit sogar Isomorphismus.

Genauso argumentiert man für die Projektion $\tau : Z \to W$. □

Lemma. *Zu jedem $\lambda \in H^*$ existiert ein zyklischer Standardmodul $Z(\lambda)$ mit Höchstgewicht λ.*

Satz B (Existenz)**.** *Zu jedem $\lambda \in H^*$ existiert ein irreduzibler zyklischer Standardmodul $V(\lambda)$ mit Höchstgewicht λ.*

Beweis. $Z(\lambda)$ hat nach Satz 20.2 (d) einen maximalen echten Untermodul Y. Der Quotient $V(\lambda) := Z(\lambda)/Y$ ist folglich irreduzibel und tut es nach Satz 20.2 (e). □

Beweis des Lemmas. Jeder zykl. Standardmodul $\mathfrak{U}(L).v^+$ lässt sich auch als B-Modul auffassen, und besitzt als solcher einen eindim. Untermodul erzeugt von v^+. Das motiviert die folgende Konstruktion:

Wir machen F zu einem B-Modul via

$$(h + \sum_{\alpha \succ 0} x_\alpha).1 := \lambda(h) \qquad (*)$$

(das ist die "selbe" Operation wie oben!) und weiter zu einem (linken) $\mathfrak{U}(B)$-Modul.

Andererseits ist $\mathfrak{U}(L)$ rechter $\mathfrak{U}(B)$-Modul, und nach Tensorieren erhalten wir den folgenden $\mathfrak{U}(L)$-Modul

$$Z(\lambda) := \mathfrak{U}(L) \otimes_{\mathfrak{U}(B)} F$$
$$\text{mit} \quad x.(a \otimes b) := (x.a) \otimes b$$

Die Faktoren sind beide frei, damit ist $v^+ := 1 \otimes 1 \neq 0$ (als Produkt zweier Basisvektoren). Außerdem gilt offenbar:

$$Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L).v^+,$$

Und wegen

$$\begin{aligned} b.v^+ &= b.(1 \otimes 1) = (b.1) \otimes 1 \\ &= 1 \otimes (b.1) \qquad \forall b \in B \subseteq \mathfrak{U}(B) \end{aligned}$$

und ($*$) ist v^+ tatsächlich Höchstgewichtsvektor zum Höchstgewicht λ. $\square$

Wir definieren abchließend noch folgende Abkürzung:

$$\Pi(\lambda) := \Pi(V(\lambda))$$

21 Endlichdimensionale irreduzible Moduln

In diesem Kapitel stellt sich heraus, dass *endlichdim. irreduzible* L-Moduln zyklische Standardmoduln zu speziellen, sog. *dominant ganzzahligen* Gewichten sind.

21.1 Eine notwendige Bedingung...

Sei also V endlichdim. irreduzibler L-Modul.

Nach 20.2 existiert dann ein Höchstgewichtsvektor $v^+ \in V$ zu *eindeutig bestimmtem* Höchstgewicht λ (Korollar 20.2). Die Irreduzibilität von V zusammen mit Satz 20.3A liefert dann

$$V = \mathfrak{U}(L).v^+ \cong V(\lambda)$$

Wir wollen nun mehr über λ herausfinden.

Zunächst finden wir – gemäß Proposition 8.3 (f) – (insbesondere) zu jeder Basiswurzel $\alpha_i \in \Delta$ eine Unteralgebra

$$\begin{aligned} & S_i := \langle x_i, y_i, h_i \rangle \cong \mathfrak{sl}(2, F) \\ \text{mit} \quad & x_i \in L_{\alpha_i},\ y_i \in L_{-\alpha_i},\ h_i \in H \end{aligned}$$

Satz. *Sei V ein endlichdim. irreduzibler L-Modul zum Höchstgewicht λ. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \lambda(h_i) &\in \mathbb{N}_0 && \forall i = 1, \ldots, l \\ \mu(h_i) &\in \mathbb{Z} && \forall i = 1, \ldots, l,\ \mu \in H^* \end{aligned}$$

Beweis. Die Cartan-Unteralgebra von S_i ist gerade $H_i := \langle h_i \rangle$.

Fassen wir V als S_i-Modul auf, so ist v^+ wiederum Höchstgewichtsvektor zum Höchstgewicht $\lambda|_{H_i}$ (denn die Wurzelräume werden lediglich kleiner). Wie oben ist dann $\lambda(h_i)$ "Höchstgewicht" im Sinne von 7.2, und dort wurde auch gezeigt, dass diese in $\mathbb{N}_0$ liegen.

Genauso übertragen sich beliebige Gewichte μ auf die S_i, und 7.2 liefert immer noch $\mu(h_i) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Definition. Die Elemente von

$$\Lambda := \{\mu \in H^* \mid \mu(h_i) \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 1, \ldots, l\}$$

heißen *ganzzahlig*, jene in

$$\Lambda^+ := \{\mu \in H^* \mid \mu(h_i) \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i = 1, \ldots, l\}$$

sogar *dominant ganzzahlig*.

Damit lautet die Aussage des Satzes: Das Höchstgewicht jedes endlichdimensionalen irreduziblen L-Moduls ist dominant ganzzahlig, jedes andere Gewicht immer noch ganzzahlig.

21.2 ...die auch hinreichend ist

Satz. *Ist λ dominant ganzzahlig, so ist $V(\lambda)$ endlichdimensional.*

Außerdem permutiert die Weylgruppe $\mathfrak{W}$ die Gewichte $\Pi(\lambda)$ und es gilt

$$\dim(V_\mu) = \dim(V_{\sigma(\mu)}) \quad \forall \mu \in \Pi(\lambda), \sigma \in \mathfrak{W}$$

Korollar. *Damit haben wir eine Bijektion*

$$\Lambda^+ \xrightarrow{V} \textit{Isomorphieklassen}\ \text{endlichdim. irreduzibler}\ L\textit{-Moduln}$$

Die x_i, y_i, h_i seien wie in 21.1, gemäß Proposition 18.1 erzeugen sie L.

Lemma. *In $\mathfrak{U}(L)$ gelten die folgenden Identitäten ($k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i, j \leq l$):*

(a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0 \quad$ *für $i \neq j$*

(b) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1) y_i^k (k - h_i)$

(c) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1) \alpha_i(h_j) y_i^{k+1}$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass in $\mathfrak{U}(L)$ folgende Entwicklungsformel gilt:

$$[a, b^{k+1}] = [a, b] b^k + b [a, b^k] \qquad (*)$$

(a) Nach Lemma 10.1 ist $\alpha_i - \alpha_j$ keine Wurzel; Lemma 20.1 (c) liefert dann

$$[x_j, y_i] \in L_{\alpha_j - \alpha_i} = 0$$

und induktiv folgt die Behauptung via ($*$).

(c) Aus $y_i \in L_{\alpha_i}$ folgt sofort

$$[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j) y_i,$$

und die Behauptung induktiv mit ($*$).

(b) IA: $[x_i, y_i] = h_i$

IS:

$$\begin{aligned} & [x_i, y_i^{k+1}] = [x_i, y_i] y_i^k + y_i [x_j, y_i^k] \\ = \ & h_i y_i^k + y_i [x_j, y_i^k] \\ = \ & [h_i, y_i^k] + y_i^k h_i + y_i [x_j, y_i^k] \\ \overset{(c)}{=} \ & -k \underbrace{\alpha_i(h_i)}_{=2} y_i^k + y_i^k h_i + y_i [x_j, y_i^k] \\ \overset{IH}{=} \ & -k y_i^k - y_i^k (k - h_i) - k y_i^k ((k-1) - h_i) \\ = \ & -(k+1) \alpha_i(h_j) y_i^{k+1} \end{aligned}$$

$\square$

Beweis des Satzes (in 9 Schritten). Sei $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ die zu $V(\lambda)$ gehörende Darstellung, und $m_i := \lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0$.

(1) $w_i := y_i^{m_i+1}.v^+ = 0$. Denn:

$$\begin{aligned} x_j.w_i &\overset{i\neq j}{=} [x_j, y_i^{m_i+1}].v^+ + y_i^{m_i+1}.\underbrace{x_j.v^+}_{=0} \overset{(a)}{=} 0 \\ x_i.w_i &= [x_i, y_i^{m_i+1}].v^+ + y_i^{m_i+1}.\underbrace{x_i.v^+}_{=0} \\ &\overset{(b)}{=} -(m_i+1)y_i^{m_i}(m_i v^+ - h_i.v^+) = 0 \end{aligned}$$

Damit muss $w_i = 0$ sein – sonst wäre w_i Höchstgewichtvektor zum Gewicht $\lambda - (m_i+1)\alpha_i \neq \lambda$, Widerspruch!

(2) *Für jedes i enthält $V(\lambda)$ nichttriviale endlichdim. S_i-Moduln.* Denn:

Der Unterraum $W_i := \langle v^+, y_i.v^+, \ldots, y_i^{m_i}.v^+\rangle$ ist nach (1) stabil unter y_i, und auch unter h_i, denn die aufspannenden Vektoren liegen in Gewichtsräumen. Und schließlich gilt:

$$\begin{aligned} x_i.y_i^{k+1}.v^+ &\overset{(b)}{=} -(k+1)y_i^k(k-h_i).v^+ \\ &= -(k+1)(k-m_i)y_i^k.v^+ \in W_i \end{aligned}$$

Damit ist $W_i \leq V(\lambda)$ ein nichttrivialer endlichdim. S_i-Modul.

(3a) *Ist W endlichdim. S_i-Modul, so auch $L.W$.* Denn:

Für $x \in S_i$ und $l.w \in L.W$ gilt

$$x.l.w = \underbrace{[x,l]}_{\in L}.w + l.\underbrace{x.w}_{\in W} \in L.W$$

Daran sieht man, dass $L.W$ ein S_i-Modul ist. Er ist endlichdimensional wegen

$$L.W = \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha.W$$

(für beliebige $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$).

(3b) *Für jedes i ist $V(\lambda)$ Summe aller endlichdim. S_i-Moduln in $V(\lambda)$.* Denn:

Wir bezeichnen die Summe mit V', sie ist nichttrivial nach (2).

Definitionsgemäß lässt sich jedes $v \in V'$ schreiben als endlich Summe

$$v = w_1 + \ldots + w_n$$

mit $w_k \in W_k$, W_k endlichdim. S_i-Modul. Und für alle $x \in L$ gilt

$$x.v \in L.W_1 + \ldots + L.W_n$$

und damit liegt $x.v \in V'$, denn die rechte Seite ist endlichdim. S_i-Modul nach (3a).

Folglich ist V' nichttrivialer L-Untermodul, also $V' = V(\lambda)$.

(4) *$\phi(x_i)$, $\phi(y_i)$ sind lokal nilpotent.* Denn:

Nach (3) liegt jedes $v \in V(\lambda)$ in einer endlichen Summe endlichdim. S_i-Moduln, d.h. in einem *endlichdim.* S_i-Modul. Dann überträgt sich aber nach Korollar 6.4 die Nilpotenz von x_i, y_i (in S_i!) auf deren Darstellung.

Es folgt unmittelbar:

(5) $s_i := \exp(\phi(x_i))\exp(\phi(-y_i))\exp(\phi(x_i))$ *sind wohldefinierte Automorphismen.*

(6) *Ist σ_i die Spiegelung bzgl. der Wurzel α_i, so gilt*

$$s_i(V(\lambda)_\mu) = V(\lambda)_{\sigma_i(\mu)}$$

für jedes Gewicht $\mu \in \Pi(\lambda)$. Denn:

$V(\lambda)_\mu$ ist endlichdim. und liegt nach der selben Argumentation wie in (4) in einem endlichdim. S_i-Modul V'. Damit entspricht $s_i|_{V'}$ gerade τ am Ende von 7.2, und für jedes $v \in V(\lambda)_\mu$ gilt

$$\begin{aligned} h_i.(s_i v) &= \phi(h_i)s_i v = s_i s_i^{-1}\phi(h_i)s_i v \\ &\overset{7.2}{=} s_i\left(-\phi(h_i)\right)v = -\mu(h_i)(s_i v) \end{aligned}$$

Liegt andererseits h im Kern von α_i, so gilt $[h, x_i] = [h, y_i] = 0$, folglich kommutiert $\phi(h)$ mit s_i und es gilt

$$h.(s_i v) = \mu(h)(s_i v)$$

Nun wird aber H von h_i und $\ker(\alpha_i)$ aufgespannt; es gilt also tatsächlich $s_i v \in V(\lambda)_{\sigma_i(\mu)}$.

(7) *Die Weylgruppe $\mathfrak{W}$ permutiert $\Pi(\lambda)$, und* $\dim(V_\mu) = \dim(V_{\sigma(\mu)})$. Denn:

Die σ_i erzeugen $\mathfrak{W}$, nach (5) sind die s_i Automorphismen. Somit folgt die Behauptung aus (6).

(8) $\Pi(\lambda)$ *ist endlich.* Denn:

Jedes Gewicht liegt ja in *irgendeiner* Weylkammer; nach 10.3 erhält man es also durch $\mathfrak{W}$-“Permutation” eines anderen Gewichts μ im Abschluss der *fundamentalen Weylkammer* $\mathfrak{C}(\Delta)$ zu Δ. Natürlich ist μ wegen

$$\operatorname{sign}\mu(h_i) = \operatorname{sign}\langle\mu, \alpha_i\rangle = \operatorname{sign}(\mu, \alpha_i) \geq 0$$

dominant, und nach 20.2 (b) ganzzahlig und erfüllt $\mu \prec \lambda$.

Allerdings ist gibt es nach Lemma 13.2B nur *endlich viele* Gewichte dieser Art, und da $\mathfrak{W}$ auch endlich ist folgt die Behauptung.

(9) $V(\lambda)$ *ist endlichdimensional.* Denn:

$V(\lambda)$ ist nach (8) endliche Summe der nach Satz 20.2 (c) endlichdim. Gewichtsräume. □

Literatur

[1] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer, 1980.