Mittelwertform

5. Vortrag des Proseminars „Intervallrechnung“ im SS 2006

Michael Walter

23. Mai 2006

1 Betrag und Durchmesser eines Intervalles

Definition. Sei $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{I}[\mathbb{R}]$. Dann heißt:

$$|A| := q(A, [0, 0])$$

der *Betrag* von A.

Satz. (Alternative Definitionen) *Sei $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{I}[\mathbb{R}]$. Dann gilt:*

(a) $|A| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$

(b) $|A| = \max\{|a| \mid a \in A\}$

Beweis. Zu (a): $|A| = q([a_1, a_2], [0, 0]) = \max\{|a_1 - 0|, |a_2 - 0|\} = \max\{|a_1|, |a_2|\}$.

Zu (b): $|A| = \max\{|a_1|, |a_2|\} = \max\{|a| \mid a_1 \leq a \leq a_2\} = \max\{|a| \mid a \in A\}$. $\square$

Satz. *Seien $A, B \in \mathbb{I}[\mathbb{R}]$. Dann gilt:*

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$$

Beweis. Klar nach Satz 1 (b). $\square$

Beispiel. Seien $A := [-1, 1]$ und $B := [-3, 1]$. Dann ist $|A| = 1$ und $|B| = 3$, also $|A| \leq |B|$, was wegen $A \subseteq B$ auch aus Satz 1 folgt.

Satz. *Seien $A = [a_1, a_2], B \in \mathbb{I}[\mathbb{R}]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $|A| \geq 0$ *und* $|A| = 0 \Leftrightarrow A = [0, 0]$

(b) $|A + B| \leq |A| + |B|$

(c) $|\lambda A| = |\lambda||A|$

(d) $|AB| = |A||B|$

Beweis. Zu (a): $|A| = \max\{|a_1|, |a_2|\} \geq 0$ und $|A| = 0 \Leftrightarrow \max\{|a_1|, |a_2|\} = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow A = [0, 0]$.

Zu (b): $|A + B| = q(A + B, [0, 0]) = q(A, -B) \leq q(A, [0, 0]) + q(-B, [0, 0]) = q(A, [0, 0]) + q(B, [0, 0]) = |A| + |B|$.

Zu (c): $|\lambda A| = \max\{|\lambda a_1|, |\lambda a_2|\} = \max\{|\lambda||a_1|, |\lambda||a_2|\} = |\lambda| \max\{|a_1|, |a_2|\} = |\lambda||A|$.

Zu (d): $|AB| = \max\{|c| \mid c \in AB\} = \max\{|ab| \mid a \in A, b \in B\} =$
$\max\{|a||b| \mid a \in A, b \in B\} = \max\{|a| \mid a \in A\} \max\{|b| \mid b \in B\} = |A||B|$. $\square$

Satz. *Seien $A = [a_1, a_2], B \in \mathbb{I}[\mathbb{R}]$. Dann gilt:*

(a) $d(A) = |A - A|$

(b) $d(A) = \max\{|a - a'| \mid a, a' \in A\}$

(c) $d(AB) \leq |A|d(B) + d(A)|B|$

Beweis. Zu (a): $d(A) = a_2 - a_1 = \max\{|a_1 - a_2|, |a_2 - a_1|\} = |A - A|$.

(b) wurde bereits im letzten Vortrag bewiesen.

Zu (c):

$$\begin{aligned}
d(AB) &= d(\{ab \mid a \in A, b \in B\}) \\
&= \max\{|ab - a'b'| \mid a, a' \in A, b, b' \in B\} \\
&= \max\{|ab - ab' + ab' - a'b'| \mid a, a' \in A, b, b' \in B\} \\
&\leq \max\{|a(b - b')| + |(a - a')b'| \mid a, a' \in A, b, b' \in B\} \\
&= \max\{|a||b - b'| + |a - a'||b'| \mid a, a' \in A, b, b' \in B\} \\
&\leq \max\{|a||b - b'| \mid a \in A, b, b' \in B\} + \\
&\quad \max\{|a - a'||b'| \mid a, a' \in A, b' \in B\} \\
&= \max\{|a| \mid a \in A\} \max\{|b - b'| \mid b, b' \in B\} + \\
&\quad \max\{|a - a'| \mid a, a' \in A\} \max\{|b| \mid b \in B\} \\
&= |A| d(B) + d(A)|B|.
\end{aligned}$$

□

2 Mittelwertform

Definition. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $X = [x_1, x_2] \subset D$. Ferner sei $f'(x)$ ein zu f' gehöriger Funktionsausdruck und dessen intervallmäßige Auswertung auf X existiere. Dann heißt

$$f(y) + f'(X)(X - y) \quad (y \in X \text{ fest})$$

eine *Mittelwertform* von f. Oft verwendet man $y = \mathrm{mid}(X) := \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Satz. *$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen von Definition 2. Ferner seien die Bedingungen von Vortrag 4, Satz 4 für die Ableitung f' erfüllt. Dann gilt für ein beliebiges $y \in X$:*

(a) $W(f, X) \subseteq f(y) + f'(X)(X - y)$

(b) $q\big(W(f, X),\ f(y) + f'(X)(X - y)\big) \leq \tilde{c} \cdot d(X)^2$

mit einer Konstanten $\tilde{c} \geq 0$.

Beweis. Zu (a): Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ bzw. $\xi \in (y, x)$ mit:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + f'(\xi)(x - y) \\
&= f(y) + f'(y + \theta(x - y))(x - y) \qquad (\theta \in (0, 1))
\end{aligned} \tag{1}$$

Offenbar gilt (1) auch für $x = y$. Also folgt wegen $\theta \in (0, 1) \subset [0, 1]$ und $x \in X$ nach Vortrag 3, Korollar 3:

$$\begin{aligned}
y + \theta(x - y) &\in y + [0, 1](X - y) \\
&= y + [0, 1][\underbrace{x_1 - y}_{\leq 0}, \underbrace{x_2 - y}_{\geq 0}] \\
&= y + [x_1 - y, x_2 - y] = X
\end{aligned}$$

Mit der Einschließungseigenschaft für f' und wegen $x \in X$ folgt dann aus (1):

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + f'(y + \theta(x - y))(x - y) \\
&\in f(y) + f'(X)(x - y) \\
&\subseteq f(y) + f'(X)(X - y)
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Zu (b): Da aus der Differenzierbarkeit von f die Stetigkeit auf dem Kompaktum X folgt, nimmt f auf X alle Werte zwischen dem Minimum $f(u)$ und dem Maximum $f(v)$ (und insbesondere die Extremwerte selbst) an, d.h.:

$$W(f,X) = [f(u), f(v)] \qquad (u, v \in X)$$

Nach dem Mittelwertsatz folgt dann:

$$\begin{aligned} d(W(f,X)) &= f(v) - f(u) \\ &= |f(v) - f(u)| \\ &\geq |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |f'(\xi)|d(X) \qquad (\xi \in X) \end{aligned} \tag{2}$$

Nach den Sätzen 1 und 1 (a) gilt:

$$y \in X \quad \Rightarrow \quad X - y \subseteq X - X \quad \Rightarrow \quad |X - y| \leq |X - X| = d(X)$$

Damit und wegen $d(X - y) = d(X)$ und Satz 1 (c) schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} d(f'(X)(X-y)) &\leq |f'(X)|d(X-y) + d(f'(X))|X-y| \\ &\leq |f'(X)|d(X) + d(f'(X))d(X) \end{aligned} \tag{3}$$

Aus der Dreiecksungleichung für die Metrik $q(\cdot,\cdot)$ und der Definition des Betrags folgt:

$$\begin{aligned} & q(f'(X),[0,0]) \leq q(f'(X), f'(\xi)) + q(f'(\xi),[0,0]) \\ \Leftrightarrow \quad & q(f'(X),[0,0]) - q(f'(\xi),[0,0]) \leq q(f'(X), f'(\xi)) \\ \Leftrightarrow \quad & |f'(X)| - |f'(\xi)| \leq q(f'(X), f'(\xi)) \end{aligned} \tag{4}$$

Da $f'(\xi) \in f'(X)$ erhalten wir mit Vortrag 4, Satz 2 außerdem:

$$q(f'(X), f'(\xi)) \leq d(f'(X)) - d(f'(\xi)) = d(f'(X)) \tag{5}$$

Schließlich kombinieren wir diese Resultate und erhalten

$$\begin{aligned} & q\big(W(f,X),\ f(y) + f'(X)(X-y)\big) && \\ \leq\ & d\big(f(y) + f'(X)(X-y)\big) - d(W(f,X)) && \text{, nach (a) und Vortrag 4, Satz 2} \\ =\ & d\big(f'(X)(X-y)\big) - d(W(f,X)) && \text{, wegen } d(A+b) = d(A) \\ \leq\ & |f'(X)|d(X) + d(f'(X))d(X) - |f'(\xi)|d(X) && \text{, nach (2) und (3)} \\ =\ & d(f'(X))d(X) + (|f'(X)| - |f'(\xi)|)d(X) && \text{, umordnen} \\ \leq\ & 2d(f'(X))d(X) && \text{, nach (4), (5)} \\ \leq\ & 2c \cdot d(X)^2 = \tilde{c} \cdot d(X)^2 && \text{, nach Vortrag 4, Satz 4} \end{aligned}$$

mit $c \geq 0$, $\tilde{c} := 2c \geq 0$ was zu zeigen war. □

1 Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - x$ mit Funktionsausdruck $f(x) := x^2 - x$. f ist zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Für die Ableitung f' verwenden wir den Funktionsausdruck $f'(x) := 2x - 1$, offenbar sind beide Funktionsausdrücke auf $\mathbb{R}$ definiert. Damit erfüllt f die Bedingungen von Satz 2.

Wir vergleichen nun die intervallmäßige Auswertung $f(X)$ und die Mittelwertform $f(y) + f'(X)(X - y)$ auf Intervallen $X := [y - \delta, y + \delta]$ $(\delta \in \mathbb{R})$. Dabei sei stets $y := 1$. Wir führen den Vergleich zunächst zweimal exemplarisch für $\delta = 2$ und $\delta = \frac{1}{2}$ durch:

1.

$$\delta = 2 \quad \Rightarrow \quad X = [-1, 3]$$

$$\begin{aligned} f(X) &= f([-1,3]) \\ &= [-1,3]^2 - [-1,3] \\ &= [0,9] - [-1,3] \\ &= [-3,10]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) + f'(X)(X-y) &= f(1) + f'([-1,3])([-1,3]-1) \\ &= 0 + (2[-1,3]-1)[-2,2] \\ &= ([-2,6]-1)[-2,2] \\ &= [-3,5][-2,2] \\ &= [-10,10]. \end{aligned}$$

2.

$$\delta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad X = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

$$\begin{aligned} f(X) &= f([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) \\ &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]^2 - [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \\ &= [\frac{1}{4}, \frac{9}{4}] - [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \\ &= [-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) + f'(X)(X-y) &= f(1) + f'([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] - 1) \\ &= 0 + (2[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] - 1)[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ &= ([1,3]-1)[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ &= [0,2][-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ &= [-1,1]. \end{aligned}$$

3. Für weitere δ ergeben sich folgende Ergebnisse:

δ	X	$f(X)$	$f(y) + f'(X)(X-y)$
3	$[-2,4]$	$[-4,18]$	$[-21,21]$
2	$[-1,3]$	$[-3,10]$	$[-10,10]$
1	$[0,2]$	$[-2,4]$	$[-3,3]$
0.5	$[0.5,1.5]$	$[-1.25,1.75]$	$[-1,1]$
0.1	$[0.9,1.1]$	$[-0.29,0.31]$	$[-0.12,0.12]$
0.01	$[0.99,1.01]$	$[-0.0299,0.0301]$	$[-0.0102,0.0102]$
0.001	$[0.999,1.001]$	$[-0.002999,0.003001]$	$[-0.001002,0.001002]$

2 Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x + 1$ mit Funktionsausdruck $f(x) := x^2 + 2x + 1$ wie in Vortrag 4. f ist zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Für die Ableitung f' verwenden wir den Funktionsausdruck $f'(x) := 2x + 2$, offenbar sind beide Funktionsausdrücke auf $\mathbb{R}$ definiert. Damit erfüllt f die Bedingungen von Satz 2.

Wie in Vortrag 4 zerlegen wir zunächst das Intervall $X := [-1, 1]$ in 4 kleinere Intervalle $X_1 := [-1, -\frac{1}{2}]$, $X_2 := [-\frac{1}{2}, 0]$, $X_3 := [0, \frac{1}{2}]$ und $X_4 := [\frac{1}{2}, 1]$.

Dann ergibt sich für die Mittelwertformen $y_i + f'(X_i)(X_i - y_i)$ um $y_i := \mathrm{mid}(X_i)$ $(i = 1, \dots, 4)$:

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= f(y_1) + f'(X_1)(X_1 - y_1) \\
&= f(-\frac{3}{4}) + f'\big([-1, -\frac{1}{2}]\big)\big([-1, -\frac{1}{2}] + \frac{3}{4}\big) \\
&= [-\frac{3}{16}, \frac{5}{16}]. \\
M_2 &:= f(y_2) + f'(X_2)(X_2 - y_2) \\
&= f(-\frac{1}{4}) + f'\big([-\frac{1}{2}, 0]\big)\big([-\frac{1}{2}, 0] + \frac{1}{4}\big) \\
&= [\frac{1}{16}, \frac{17}{16}]. \\
M_3 &:= f(y_3) + f'(X_3)(X_3 - y_3) \\
&= f(\frac{1}{4}) + f'\big([0, \frac{1}{2}]\big)\big([0, \frac{1}{2}] - \frac{1}{4}\big) \\
&= [\frac{13}{16}, \frac{37}{16}]. \\
M_4 &:= f(y_4) + f'(X_4)(X_4 - y_4) \\
&= f(\frac{3}{4}) + f'\big([\frac{1}{2}, 1]\big)\big([\frac{1}{2}, 1] - \frac{3}{4}\big) \\
&= [\frac{33}{16}, \frac{65}{16}].
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
q\big(W(f, X),\ \bigcup_{i=1}^{4} M_i\big) &= q\big([0, 4],\ [-\frac{3}{16}, \frac{65}{16}]\big) &= \frac{3}{16} \\
q\big(W(f, X),\ \bigcup_{i=1}^{4} f(X_i)\big) &= q\big([0, 4],\ [-\frac{3}{4}, 4]\big) &= \frac{12}{16} \qquad \text{(nach Vortrag 4)}
\end{aligned}
$$

erhält man so also eine bessere Näherung des Wertebereichs als mit der intervallmäßigen Auswertung auf Teilintervallen wie in Vortrag 4.