GAUSSABSCHÄTZUNGEN FÜR WÄRMELEITUNGSKERNE

MICHAEL WALTER

Es sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Wir bezeichnen die komplexwertigen messbaren Funktionen auf Ω mit $L^0 := L^0(\Omega; \mathbb{C})$. Allgemein schreiben wir immer $L^p := L^p(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ und $||\cdot||_p := ||\cdot||_{L^p}$. Unsere Halbgruppen sind immer stark stetig.

1. Einführung

Wärmeleitungskerne. Unter bestimmten Voraussetzungen besitzt eine Halbgruppe $(e^{-At})_{t\geq 0}$ auf L^2 mit selbstadjungiertem Erzeuger A einen *Kern* $(p_t)_{t\geq 0}$, d.h. es existieren $p_t \in L^0(\Omega \times \Omega)$ mit

$$(e^{-At}u)(x) = \int_\Omega p_t(x, \cdot)u \, d\mu \qquad (\text{a.e.}, \forall t > 0, u \in L^2)$$

Dieser Kern heißt *Wärmeleitungskern* falls er einer Abschätzung

$$||p_t||_\infty \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \qquad (\text{a.e.}, \forall t > 0)$$

genügt.

Beispiel 1. Der *Gaußkern*

$$g_t(x, y) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

ist der Wärmeleitungskern der *Gaußhalbgruppe* $(e^{-\Delta t})$, die vom Laplace-Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ erzeugt wird.

L^2–L^∞-Abschätzungen. Hinreichende Voraussetzungen für die Existenz eines Wärmeleitungskerns sind L^2–L^∞-*Abschätzungen* der Form

$$||e^{-At}||_{L^2\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \qquad (\forall t > 0),$$

welche wir in Abschnitt 2 untersuchen werden. Man erhält nämlich durch Dualisieren die gleiche Abschätzung für $||e^{-At}||_{L^1\to L^2}$; es folgt

$$||e^{-At}||_{L^1\to L^\infty} \lesssim ||e^{-A\frac{t}{2}}||_{L^1\to L^2}||e^{-A\frac{t}{2}}||_{L^2\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \qquad (\forall t > 0),$$

und das garantiert die Existenz eines Wärmeleitungskerns.

Gaußabschätzungen. Besitzt die Halbgruppe nun einen solchen Wärmeleitungskern, so ist es oft interessant, ihn mit dem Gaußkern zu vergleichen (vgl. Einführung und Bibliographie in [CS08]). In Abschnitt 3 werden wir deshalb zeigen, dass ein gleichmäßig elliptischer Operator unter bestimmten Voraussetzungen sogenannte *Gaußabschätzungen* der Form

$$|p_t(x, y)| \lesssim_\epsilon |g_{\delta t}(x, y)|e^{(\delta\alpha+\epsilon)t} \qquad (\text{a.e.}, \forall t > 0, \epsilon > 0)$$

zulässt.

Diese Ausarbeitung basiert auf [Ouh05, Kapitel 6].

2. L^2–L^∞-Abschätzungen

Voraussetzungen. In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{a}$ eine dicht definierte, symmetrische, akkretive, stetige und abgeschlossene Form auf L^2. Der assoziierte Operator A ist dann akkretiv und selbstadjungiert und die zugehörige Halbgruppe $(e^{-At})_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf L^2. Wir fordern desweiteren, dass die Halbgruppe L^∞-kontraktiv ist[1]. Damit ist sie auch L^p-kontraktiv für alle $p \in (2, \infty)$.

Erinnerungen. Aus den Forderungen an $\mathfrak{a}$ ergibt sich die Existenz einer akkretiven selbstadjungierten *Quadratwurzel* $A^{\frac{1}{2}}$ von A. Es gilt $D(A^{\frac{1}{2}}) = D(\mathfrak{a})$ und

$$\mathfrak{a}(u, v) = \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v \rangle_2$$

(siehe [Ouh05, Kapitel 8]). Ist $A^{\frac{1}{2}}$ außerdem injektiv so existiert die Inverse; sie ist dicht definiert und hat folgende Integraldarstellung:

$$A^{-\frac{1}{2}} u = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt \tag{1}$$

(vgl. [KW04, Corollary 15.20]).

Aus der Analytizität der Halbgruppe ergeben sich noch folgende Abschätzungen

$$||Ae^{-At}|| \lesssim t^{-1}$$
$$||A^{\frac{1}{2}} e^{-At}|| \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$$

Extrapolation. Das folgende Lemma liefert L^2–L^∞-Abschätzungen durch Extrapolation. Es gilt sogar für beliebige Halbgruppen auf L^2, soweit diese nur L^∞-kontraktiv sind.

Lemma 2 (Extrapolation)**.** *Für Konstanten $r \geq 2$ und $C, \alpha > 0$ gelte*

$$||e^{-At}||_{L^2 \to L^r} \leq Ct^{-\alpha} \qquad (\forall t > 0)$$

Dann folgt

$$||e^{-At}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{\alpha r}{r-2}} \qquad (\forall t > 0)$$

Beweis. Riesz-Thorin-Interpolation zwischen L^2–L^r und L^∞–L^∞ liefert für alle $p \in [2, \infty)$ die folgende Abschätzung ($\theta = \frac{2}{p}$, $q = \frac{pr}{2}$):

$$||e^{-At}||_{L^p \to L^{pr/2}} \leq C^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{2\alpha}{p}} \qquad (\forall t > 0)$$

Sie erlaubt es, dass wir uns sukzessive (jeweils um den Faktor $\frac{r}{2} > 1$) der gesuchten Norm nähern. Dafür setzen wir $t_k := \frac{r-1}{r} r^{-k}$ und $p_k := 2(\frac{r}{2})^k$. Dann gelten nämlich $\sum t_k = 1$ sowie $\sum \frac{1}{p_k} = \frac{r}{2(r-2)}$, und wir erhalten für alle $u \in L^2 \cap L^\infty$

$$||e^{-At} u||_{p_n} \leq \prod_{k=0}^{n-1} ||e^{-Att_k}||_{L^{p_k} \to L^{p_{k+1}}} \cdot \underbrace{||e^{-At(1-\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}||_{L^{p_n} \to L^{p_n}}}_{\leq 1} \cdot ||u||_2,$$

und damit durch Grenzübergang wegen der Dichtheit die Behauptung:

$$||e^{-At}||_{L^2 \to L^\infty} \leq \prod_k C^{\frac{2}{p_k}} (tt_k)^{-\frac{2\alpha}{p_k}} \lesssim t^{-\frac{\alpha r}{r-2}}$$

□

[1]Tatsächlich ist bereits gleichmäßige Beschränktheit auf L^∞ hinreichend für die Ergebnisse dieses Kapitels, siehe [Ouh05, S. 156].

Charakterisierung. Die folgenden Sätze charakterisieren L^2–L^∞-Abschätzungen durch Ungleichungen bekannten Typs.

Satz 3 (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung)**.** *Für $d > 0$ sind äquivalent:*

(i) $||e^{-At}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \qquad (\forall t > 0)$

(ii) für ein/alle $q \in (2, \infty]$ mit $d\frac{q-2}{2q} < 1$ gilt

$$||u||_q \lesssim \mathfrak{a}(u,u)^{d\frac{q-2}{2q}} ||u||_2^{1-d\frac{q-2}{2q}} \qquad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$$

Satz 4 (Nash-Ungleichung)**.** *Für $d > 0$ sind äquivalent:*

(i) $||e^{-At}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \qquad (\forall t > 0)$

(ii) $||u||_2^{2+\frac{4}{d}} \lesssim \mathfrak{a}(u,u)||u||_1^{\frac{4}{d}} \qquad (\forall u \in D(\mathfrak{a}) \cap L^1)$

Die vorangehenden Sätze beweisen wir nicht, da wir sie im Weiteren nicht benötigen werden.

Satz 5 (Sobolev-Ungleichung)**.** *Für $d > 2$ und mit $q^\star := \frac{qd}{d-q}$ sind äquivalent:*

(i) $||e^{-At}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \qquad (\forall t > 0)$

(ii) $A^{-\frac{1}{2}} : L^2 \to L^{2^\star}$ *existiert und ist stetig*

(iii) $||u||_{2^\star}^2 \lesssim \mathfrak{a}(u,u) \qquad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Zunächst liefert Riesz-Thorin-Interpolation zwischen L^1–L^∞ (!) und L^∞–L^∞ Abschätzungen

$$||e^{-At}||_{L^q \to L^\infty} \lesssim_q t^{-\frac{d}{2q}} \qquad (\forall t > 0, q \in (1, \infty))$$

Wir werden nun zeigen, dass $A^{-\frac{1}{2}}$ für alle $q \in (1, d)$ vom schwachen Typ $(q, q^\star)$ ist. Marcinkiewicz' Interpolationssatz liefert dann die Behauptung (beachte $d > 2$).

Seien also $q \in (1, d)$ und $u \in L^2$ fest. Wegen (i) existiert die Inverse und gemäß (1) schreiben wir

$$A^{-\frac{1}{2}}u = \underbrace{\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^T t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt}_{=:v} + \underbrace{\pi^{-\frac{1}{2}} \int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt}_{=:w}$$

mit einer Konstanten $T > 0$, die wir erst später festlegen werden. Es gilt nun

$$||w||_\infty \lesssim_q \pi^{-\frac{1}{2}} \int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}-\frac{d}{2q}} ||u||_q \, dt \leq: C_q T^{\frac{q-d}{2q}} ||u||_q$$

($C_q > 0$ geeignet). Zu festem $\lambda > 0$ wählen wir jetzt ein $T > 0$ mit

$$C_q T^{\frac{q-d}{2q}} ||u||_q = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow T^{\frac{q}{2}} = (\frac{\lambda}{2} \frac{1}{C_q} \frac{1}{||u||_q})^{-\frac{q^2}{d-q}}$$

Es gilt dann tatsächlich

$$\mu(|A^{-\frac{1}{2}}u| \geq \lambda) \leq \mu(|v| \geq \frac{\lambda}{2}) \leq (\frac{\lambda}{2})^{-q} ||v||_q^q \leq (\frac{\lambda}{2})^{-q} \pi^{-\frac{q}{2}} 2^q T^{\frac{q}{2}} ||u||_q^q$$
$$\lesssim_q \lambda^{-q^\star} ||u||_q^{q^\star}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Die Stetigkeit impliziert

$$||u||_{2^\star}^2 = ||A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u||_{2^\star}^2 \lesssim ||A^{\frac{1}{2}} u||^2 = \mathfrak{a}(u,u) \qquad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wegen (ii) gilt für alle $u \in D(\mathfrak{a})$ und $t > 0$

$$||e^{-At}u||_{2^\star}^2 \lesssim \mathfrak{a}(e^{-At}u, e^{-At}u) \leq ||e^{-At}u||_2 ||Ae^{-At}u||_2 \lesssim t^{-1} ||u||_2^2,$$

also

$$||e^{-At}||_{L^2\to L^{2^\star}} \lesssim t^{-1/2} \qquad (\forall t>0)$$

Lemma 2 liefert nun die Behauptung. □

Verbesserung. Das folgende Lemma schließlich erlaubt es L^2–L^∞-Abschätzungen mittels L^2–L^2–Abschätzungen zu verbessern.

Lemma 6. *Für eine Halbgruppe $T(t)$ auf L^2 und Konstanten $d>0$ und $\omega,\alpha\in\mathbb{R}$ gelte*

$$||T(t)||_{L^2\to L^2} \lesssim e^{-\omega t} \qquad (\forall t>0)$$
$$||T(t)||_{L^2\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{\alpha t} \qquad (\forall t>0)$$

Dann gilt sogar

$$||T(t)||_{L^2\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{-\omega t}(1+\max(\alpha+\omega,0)t)^{\frac{d}{4}} \qquad (\forall t>0)$$

Beweis. Nur der Fall $\beta := \alpha+\omega>0$ ist interessant. Wir betrachten die reskalierte Halbgruppe $S(t) := e^{\omega t}T(t)$. Nach Voraussetzung existieren Konstanten $M\geq 1$, $C>0$ mit

$$||S(t)||_{L^2\to L^2} \leq M$$
$$||S(t)||_{L^2\to L^\infty} \leq Ct^{-\frac{d}{4}}e^{\beta t}$$

Für $\beta t\leq 1$ gilt natürlich

$$||S(t)||_{L^2\to L^\infty} \leq Cet^{-\frac{d}{4}}$$

und für $\beta t>1$ erhalten wir

$$||S(t)||_{L^2\to L^\infty} \leq ||S(\frac{1}{\beta})||_{L^2\to L^\infty}||S(t-\frac{1}{\beta})||_{L^2\to L^2} \leq Ce\beta^{\frac{d}{4}}M$$
$$\leq MCet^{-\frac{d}{4}}(\beta t)^{\frac{d}{4}}$$

Zusammen gilt

$$||S(t)||_{L^2\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}}(1+\beta t)^{\frac{d}{4}}$$

und das zeigt die Behauptung. □

3. Gaussabschätzungen

Voraussetzungen. In diesem Abschnitt sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, μ das Lebesgue-Maß und $H^1_0\subseteq V=\overline{V}\subseteq H^1$ ein Unterraum. Wie betrachten eine *gleichmäßig elliptische* Form

$$\mathfrak{a}_V(u,v) := \int_\Omega (\nabla u)^T\mathcal{A}(\overline{\nabla v}) + b^T(\nabla u)\overline{v} + uc^T(\overline{\nabla v}) + a_0u\overline{v}\,dx$$

auf L^2, d.h. die Koeffizienten $\mathcal{A} := (a_{i,j})$, $b := (b_i)$, $c := (c_i)$ und a_0 liegen in L^∞ und es existiert eine Konstante $\eta>0$ so dass gilt

$$\operatorname{Re}\xi^T\mathcal{A}\overline{\xi} \geq \eta|\xi|^2 \qquad (\text{a.e.}, \forall\xi\in\mathbb{C}^d)$$

Den assoziierten Operator bezeichnen wir mit A_V.

Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall reellwertiger Leitkoeffizienten $\mathcal{A}$ und Raumdimension $d\geq 3$ beschränken. Auf die erste Einschränkung lässt sich für hermitesche $\mathcal{A}$ unter bestimmten Wachstumsbedingungen verzichten. Die zweite ist generell unnötig: Wir treffen sie lediglich, um die folgende Darstellung zu vereinfachen; die Sätze (nicht aber das Lemma), die wir beweisen werden, gelten aber auch im Falle $d\leq 2$.

Schließlich wollen wir noch annehmen, dass der Raum der Bedingung

$$u \in V \Rightarrow (1 \wedge |u|)\,\mathrm{sign}(u) \in V$$

genügt sowie dass eine stetige Einbettung $V \hookrightarrow L^{2^\star}$ existiert.

Beispiel 7. Satz 5 angewendet auf die Gaußhalbgruppe aus Beispiel 1 liefert eine Sobolev-Ungleichung auf $\mathbb{R}^d$. Da sich jede Funktion in $H_0^1(\Omega)$ durch 0 zu einer Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen lässt, erhalten wir also immer eine Abschätzung

$$||u||_{2^\star} \lesssim ||\nabla u||_2 \qquad (\forall u \in H_0^1),$$

Insbesondere existiert immer eine stetige Einbettung $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^\star}$.

Besitzt Ω die *Erweiterungseigenschaft*, d.h. existiert eine stetiger Fortsetzungsoperator $H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$, so existiert die gewünschte Einbettung sogar für *beliebiges* V.

Erinnerungen. Unter den Voraussetzungen an Raum und Koeffizienten erfüllt die von A_V induzierte Halbgruppe für jedes $p \in [2, \infty)$ die folgende Wachstumsschranke

$$||e^{-A_V t}||_{L^p \to L^p} \leq e^{\omega_p t} \qquad (\forall t > 0),$$

wobei

$$\omega_p := \frac{1}{\eta}(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}) \sum_i ||b_i - c_i||_\infty^2 + \frac{p}{\eta} \sum_i ||\operatorname{Re}(c_i)||_\infty^2 + ||(\operatorname{Re}(a_0))^-||_\infty$$

Außerdem erhalten wir mit

$$s(A_V) := \inf\{\operatorname{Re}\mathfrak{a}_V(u,u) : u \in V, ||u||_2 = 1\} \geq -\omega_2$$

immer eine akkretive Form $\mathfrak{a}_V - s(A_V)$ (siehe [Ouh05, Theorem 4.28])).

L^2–L^∞-Abschätzungen. Wir beweisen zunächst in zwei Schritten eine L^2–L^∞-Abschätzung, welche wir dann durch Störung in eine Gaußabschätzung verwandeln können.

Lemma 8. *Für alle $\epsilon > 0$ haben wir eine Abschätzung*

$$||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^{2^\star}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}} e^{(\omega_{2^\star} + \epsilon)t} \qquad (\forall t > 0)$$

Falls $V = H_0^1(\Omega)$ so ist sogar $\epsilon = 0$ erlaubt.

Beweis. (1) Zunächst erhalten wir aus der Ellipizitätsbedingung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\eta||\nabla u||_2^2 \leq \operatorname{Re} \int_\Omega (\nabla u)^T \mathcal{A}(\overline{\nabla u})\ dx \\
=&\operatorname{Re}(\mathfrak{a}_V(u,u) - \sum_i \int_\Omega b_i(D_i u)\overline{u} + c_i(\overline{D_i u})u\ dx - \int_\Omega a_0 |u|^2 dx) \\
\leq&\operatorname{Re}(\mathfrak{a}_V(u,u)) + \sum_i \int_\Omega (|\operatorname{Re}(b_i + c_i)| + |\operatorname{Im}(b_i - c_i)|)|D_i u||u| dx + ||(\operatorname{Re}(a_0))^-||_\infty ||u||_2^2 \\
\leq&\operatorname{Re}(\mathfrak{a}_V(u,u)) + \frac{\eta}{2}||\nabla u||_2^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2\eta}\sum_i |||\operatorname{Re}(b_i + c_i)| + |\operatorname{Im}(b_i - c_i)|||_\infty^2 + ||(\operatorname{Re}(a_0))^-||_\infty\right)}_{=:\omega} ||u||_2^2
\end{aligned}$$

(mit Cauchy-Schwarz und $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$), also

$$\frac{\eta}{2}||\nabla u||_2^2 \leq \operatorname{Re}(\mathfrak{a}_v(u,u)) + \omega||u||_2^2$$

(2) Andererseits liefert die stetige Einbettung $V \hookrightarrow L^{2^\star}$ für jedes feste $\epsilon > 0$ eine Abschätzung der Form

$$||u||_{2^\star}^2 \lesssim \epsilon ||u||_2^2 + \frac{\eta}{2}||\nabla u||_2^2 \qquad (\forall u \in V)$$

Im Fall $V = H_0^1(\Omega)$ können wir wegen Beispiel 7 sogar $\epsilon = 0$ zulassen können. Jetzt rechnet man noch nach, dass $\omega \leq \omega_{2^\star}$ gilt. Dann folgt

$$||u||_{2^\star}^2 \overset{(1)}{\lesssim} (\epsilon + \omega_{2^\star})||u||_2^2 + \mathrm{Re}(\mathfrak{a}_V(u,u)) \qquad (\forall u \in V)$$

(3) Nach der Erinnerung oben definiert $T(t) := e^{-A_V t} e^{-(\omega_{2^\star}+\epsilon)t}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^{2^\star}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
t||T(t)u||_{2^\star}^2 &\leq \int_0^t ||T(s)u||_{2^\star}^2 \, ds \\
&\overset{(2)}{\lesssim} \int_0^t (\epsilon + \omega_{2^\star})||T(s)u||_2^2 + \mathrm{Re}(\mathfrak{a}_V(T(s)u, T(s)u)) \; ds \\
&= -\int_0^t \frac{d}{ds}||T(s)u||_2^2 ds = ||u||_2^2 - ||T(t)u||_2^2 \\
&\leq ||u||_2^2 \qquad (\forall t > 0, u \in L^2 \cap L^{2^\star}),
\end{aligned}$$

d.h.

$$||T(t)||_{L^2 \to L^{2^\star}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Satz 9 (L^2–L^∞-Abschätzung)**.** *Für jedes $\epsilon > 0$ haben wir eine Abschätzung*

$$||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{-s(A_V)t}(1 + (\alpha_1 + c\alpha_2 + \epsilon + s(A_V))t)^{\frac{d}{4}} \qquad (\forall t > 0)$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= ||(\mathrm{Re}(a_0))^-||_\infty + \frac{1}{\eta}\sum_i ||b_i - c_i||_\infty^2, \\
\alpha_2 &:= \frac{2}{\eta}\sum_i ||\,\mathrm{Re}(c_i)||_\infty^2
\end{aligned}$$

und einer Konstanten $c \geq 1$, die nur von d abhängt. Falls $V = H_0^1(\Omega)$ so ist sogar $\epsilon = 0$ erlaubt.

Beweis. (1) Für jede Konstante $c \geq 1$ (wir werden diese später festlegen) gilt

$$\alpha_1 + c\alpha_2 + s(A_V) \geq \alpha_1 + \alpha_2 + s(A_V) = w_2 + s(A_V) \geq 0$$

Deshalb und wegen

$$||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^2} \leq e^{-s(A_V)t}$$

und Lemma 6 genügt es, folgende schwächere Abschätzung zu beweisen:

$$||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{(\alpha_1 + c\alpha_2 + \epsilon)t}$$

(2) Sei $p \in [2, \infty)$; es gilt dann $2(p-1) \geq p$. Die Erinnerung und Lemma 8 liefern

$$\begin{aligned}
||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^{2^\star}} &\leq C_\epsilon t^{-\frac{1}{2}} e^{(\omega_{2^\star}+\epsilon)t} \\
||e^{-A_V t}||_{L^{2(p-1)} \to L^{2(p-1)}} &\leq e^{\omega_{2(p-1)}t}
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir Riesz-Thorin-Interpolation an ($\theta = \frac{1}{p}$, $q = \frac{d}{d-1}p$):

$$||e^{-A_V t}||_{L^p \to L^{pd/(d-1)}} \leq C_\epsilon^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{2p}} e^{(\theta\omega_{2^\star} + (1-\theta)\omega_{2(p-1)})t} e^{\frac{\epsilon t}{p}}$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\theta\omega_{2^\star} + (1-\theta)\omega_{2(p-1)} \le \alpha_1 + \underbrace{\frac{2(p-1)^2 + \frac{2d}{d-2}}{2p}}_{=:\gamma_p} \alpha_2$$

gilt; so erhalten wir die Abschätzung

$$||e^{-A_V t}||_{L^p \to L^{pd/(d-1)}} \le C_\epsilon^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{2p}} e^{(\alpha_1+\gamma_p\alpha_2)t} e^{\frac{\epsilon t}{p}}$$

(3) Mit deren Hilfe können wir uns nun wie Beweis von Lemma 2 schrittweise der gesuchten Norm nähern (nämlich jeweils um den Faktor $\frac{d}{d-1} > 1$): Wir setzen $t_k := \frac{d+1}{2d}(\frac{2d}{d-1})^{-k}$ und $p_k := 2(\frac{d}{d-1})^k$. Dann gelten $\sum t_k = 1$ und $\sum \frac{1}{p_k} = \frac{d}{2}$ und wir erhalten

$$||e^{-A_V t}||_{L^2 \to L^\infty} \le \prod_k ||e^{-tt_k A_V}||_{L^{p_k} \to L^{p_{k+1}}}$$

$$\le \prod_k C_\epsilon^{\frac{1}{p_k}} t^{-\frac{1}{2p_k}} e^{(\alpha_1+\gamma_{p_k}\alpha_2)t_k} e^{\frac{\epsilon t t_k}{p_k}} \overset{(2)}{\lesssim} t^{-\frac{d}{4}} e^{(\alpha_1 + c\alpha_2+\epsilon)t}$$

mit der Konstanten $c := \max(1, \sum t_k\gamma_{p_k}) \in [1,\infty)$, die nur von d abhängt. Schritt (1) liefert nun die Behauptung. □

Gaußabschätzungen. Unter einer zusätzlichen Bedingung an den Definitionsbereich der Form erhalten wir nun das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 10 (Gaußabschätzung)**.** *Erfüllt der Definitionsbereich die Bedingung*

$$u \in V \Rightarrow e^\psi u \in V \qquad (\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) \text{ mit } \psi,\ |\nabla\psi| \text{ beschränkt})$$

so besitzt die Halbgruppe $(e^{-A_V t})_{t\ge 0}$ *einen Wärmeleitungskern* $(p_{V,t})_{t\ge0}$*. Er genügt für jedes* $\epsilon > 0$ *einer Abschätzung*

$$|p_{V,t}(x,y)| \lesssim \underbrace{t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\delta t}\right)}_{\simeq g_{\delta t}(x,y)} e^{(\delta\alpha+\epsilon)t} \qquad (a.e., \forall t>0)$$

mit

$$\alpha := ||(\mathrm{Re}(a_0))^-||_\infty + \sum_i ||b_i - c_i||_\infty^2 + \sum_i (||\mathrm{Re}(b_i)||_\infty^2 + ||\mathrm{Re}(c_i)||_\infty^2)$$

und einer weiteren Konstanten $\delta > 0$*, die nur von* d*,* η *und* $||\mathcal{A}||_\infty$ *abhängt. Falls* $V = H_0^1(\Omega)$ *so ist sogar* $\epsilon = 0$ *erlaubt.*

Beweis. (1) Zunächst wenden wir Satz 9 auf $e^{-A_V t}$ und $e^{-A_V^\star t}$ an, und erhalten für festes ϵ eine L^1–L^∞-Abschätzung

$$||e^{-A_V t}||_{L^1\to L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-s(A_V)t}(1 + (c\alpha + \epsilon + \frac{1}{2}s(A_V))t)^{\frac{d}{2}}$$

(beachte: (i) die Konstante c hier hängt jetzt von d und η ab; (ii) beim Übergang zur adjungierten Form vertauschen sich die Rollen von c_k und b_k, daher die symmetrische Form der Konstanten α). Diese Abschätzung liefert sofort die Existenz eines Kerns $(p_{V,t})$ mit

$$||p_{V,t}||_\infty \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-s(A_V)t}(1 + (c\alpha + \epsilon + \frac{1}{2}s(A_V))t)^{\frac{d}{2}}$$

(2) Unter Benutzung von $1 + x \leq e^x$ und nach Abänderung der Konstanten lässt sich diese Abschätzung abschwächen zu

$$||p_{V,t}||_\infty \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{(c\alpha+\epsilon)t}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Konstante C nur von V, η und ϵ abhängt.

(3) Wir wenden jetzt ein Störungsargument an. Für festes $\lambda > 0$ und beschränktem $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ mit $||\nabla\phi||_\infty \leq 1$ betrachten wir die folgende Form auf V:

$$\mathfrak{b}_V(u,v) := \mathfrak{a}_V(e^{\lambda\phi}u, e^{-\lambda\phi}v)$$

Sie ist wohldefiniert wegen der zusätzlichen Forderung an V. Der Hauptteil der Form bleib dabei gleich; die $||c_i||_\infty$ und $||d_i||_\infty$ ändern sich um $O(\lambda||\mathcal{A}||_\infty)$ und $||a_0||_\infty$ um $O(\lambda^2||\mathcal{A}||_\infty)$; damit ändert sich die Konstante α um $O(\lambda^2||\mathcal{A}||_\infty)$.

Die von $\mathfrak{b}_V$ induzierte Halbgruppe genügt also wegen (2) einer Abschätzung

$$||e^{-\lambda\phi}e^{-A_V t}e^{\lambda\phi}||_{L^1\to L^\infty} \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{(\delta(\alpha+\lambda^2)+\epsilon)t}$$

mit gleichem C und einer neuen Konstanten $\delta > 0$, die nur von d, η und $||\mathcal{A}||_\infty$ abhängt. Insbesondere hängen beide Konstanten *nicht* von der Störung ab! Die Abschätzung überträgt sich wie folgt auf den Kern:

$$|p_{V,t}(x,y)| \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{\lambda(\phi(x)-\phi(y))+\delta\lambda^2 t} e^{(\delta\alpha+\epsilon)t}$$

(4) Speziell für $\lambda := \frac{\phi(y)-\phi(x)}{2\delta t}$ ergibt sich

$$|p_{V,t}(x,y)| \leq Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{(\phi(x)-\phi(y))^2}{4\delta t}\right) e^{(\delta\alpha+\epsilon)t} (\text{a.e.}, \forall t > 0)$$

(wobei die Nullmenge, auf der die Behauptung nicht gilt, nicht von ϕ abhängt).

Jetzt optimieren wir noch über ϕ. Für jedes $x, y \in \Omega$ würde die Funktion $\phi(z) := \min(|x-z|, |x-y|)$ die Behauptung liefern; wir dürfen sie aber offenbar nicht direkt verwenden. Es ist allerdings möglich, sie durch eine Folge (ϕ_n) von C_c^∞-Funktionen mit $||\nabla\phi_n||_\infty \leq 1$ zu approximieren (vgl. [Dav87]). Wir erhalten die Gaußabschätzung dann durch Grenzübergang. □

Literatur

[CS08] Thierry Coulhon and Adam Sikora. Gaussian heat kernel upper bounds via Phragmén-Lindelöf theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2008.

[Dav87] Edward Brian Davies. Explicit constants for Gaussian upper bounds on heat kernels. *American Journal of Mathematics*, 1987.

[KW04] Peer C. Kunstmann and Lutz Weis. *Maximal L_p-regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-functional Calculus.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2004.

[Ouh05] El-Maati Ouhabaz. *Analysis of Heat Equations on Domains.* Princeton University Press, 2005.